EXAMEN GLOBAL

1. Resuelve la ecuación: $\frac{3z+1}{5-i}=i$ (en la que i representa a la unidad imaginaria).
2. Con el mínimo número de cálculos posible halla, razonadamente, la altura de un ciprés sabiendo que la longitud de su sombra es de 3 m a una hora en la que el ángulo que forman los rayos del sol con la vertical es de 23º 11′ 54″.
3. Halla razonadamente el valor de α sabiendo que $sen\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $90º<\alpha<360º$.
4. Si $sen\alpha=k$ y $90º<\alpha<180º$ deduce el valor de $sen\ 2\alpha$.
5. Expresa el vector $\vec{a}$ =(−1 , 2) como combinación lineal de los vectores $\vec{b}$ =(2 , 3) y $\vec{c}$ =(3 , −4).
6. Halla, racionalizada y simplificada, la distancia exacta entre las rectas $r\equiv(y=2x-3)$ y $s\equiv(6x-3y+5=0)$.
7. Si $\ln 2=0'69$ y $\ln 3=1'10$ Halla la función de interpolación lineal que permita aproximar el valor de los logaritmos neperianos de los números comprendidos entre 2 y 3 y aplícala para estimar el valor de $\ln 2'7$.
8. Halla el valor de a para que la función definida por $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2+ax+6}$ sea discontinua en $x=3$ y justifica qué clase de discontinuidad sería.
9. Resuelve la ecuación: $1+2\cdot 3^{4x-5}=67$ dando el resultado redondeado en las centésimas.
10. Sea $g(x)=(2x+9)^5$ halla la expresión de $a)$ Su derivada $g'(x)$ y $b)$ Su primitiva general $G(x)$.

1. $$\frac{3z+1}{5-i}=i \xrightarrow{\cdot(5-i)} 3z+1=5i-i^2 \xrightarrow{+\ i^2=-1} 3z=5i \xrightarrow{\cdot\frac{1}{3}} \boxed{z=\frac{5}{3}i}$$

2. Si unimos el punto más alto del ciprés con el extremo de la sombra este segmento es la hipotenusa que completa un triángulo rectángulo cuyos catetos son la altura, h, del ciprés y la longitud, l, de su sombra. El ángulo, α, que conocemos, es el opuesto a este a este último; por lo tanto:

$$tg\ \alpha=\frac{l}{h} \Rightarrow h=\frac{l}{tg\alpha}=\frac{3}{tg\ 23º11'54''}=7$$

El ciprés tiene $7m$ de altura.

3. $sen\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $90º<\alpha<360º$

El ángulo del primer cuadrante cuyo seno vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$ es el de $60º$. El que nos piden es aquel cuyo punto asociado, en el sistema goniométrico, tiene la misma ordenada; por lo tanto, es el de 180º − 60º = 120º.

Si $sen\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $90º<\alpha<360º \Rightarrow \boxed{\alpha=120º}$

4. $sen\ 2\alpha = 2sen\alpha\cos\alpha =$*

Obtenemos $\cos\alpha$ a partir de la ecuación fundamental de la trigonometría, teniendo en cuenta que si $90^o < \alpha < 180^o \Rightarrow \alpha \in$ 2º cuadrante $\Rightarrow \cos\alpha < 0$

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-sen^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-k^2}$$

$$* \boxed{sen\ 2\alpha = -\ 2k\sqrt{1-k^2}}$$

5. Para expresar $\vec{a}$ =(−1 , 2) como combinación lineal de $\vec{b}$ =(2 , 3) y $\vec{c}$ =(3 , −4) tenemos que hallar dos números reales , x e y que hagan que: $\vec{a} = x\,\vec{b} + y\,\vec{c}$ sustituimos $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ por sus valores y resolvemos la ecuación:

$$\vec{a} = x\,\vec{b} + y\,\vec{c} \Rightarrow (-1\ ,\ 2) = x(2\ ,\ 3) + y(3\ ,\ -4) \Rightarrow (-1\ ,\ 2) = (2x\ ,\ 3x) + y(3y\ ,\ -4y)$$

$$\Rightarrow (-1\ ,\ 2) = (2x+3y\ ,\ 3x-4y) \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 3x-4y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3E1-2E2\ \ 17y=-7 \\ 4E1+3E2\ \ 17x=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-7/17 \\ x=2/17 \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{2}{17}\vec{b} + \frac{-7}{17}\vec{c}}$$

6. Distancia entre $r \equiv (y = 2x-3)$ y $s \equiv (6x-3y+5)$

$s \equiv (6x-3y+5) \Leftrightarrow y = 2x+\frac{5}{3} \Rightarrow$ Las dos rectas tienen la misma pendiente, m = 2 por lo que son paralelas y la distancia entre ambas la obtenemos a partir de la fórmula de la distancia entre un punto $P(x_0\ ,y_0)$ de la recta r y la recta $s \equiv (6x-3y+5)$.

$$d(r\,,s) = d(P,\ s) = \frac{|6x_0-3y_0+5|}{\sqrt{6^2+(-3)^2}}$$

Las coordenadas del punto P de r es cualquiera de las infinitas soluciones de su ecuación por ejemplo $P(0\,,-3)$. Sustituyendo x_0 por 0 e y_0 por -3 en la ecuación anterior y efectuando las operaciones obtenemos la distancia entre las rectas:

$$d(P,\ s) = \frac{|6\cdot 0-3(-3)+5|}{\sqrt{6^2+(-3)^2}} = \frac{14}{\sqrt{45}} = \frac{14}{3\sqrt{5}} = \frac{14}{3\sqrt{5}}\,\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{14}{15}\sqrt{5}$$

La distancia entre las rectas es $\boxed{d(r\,,s) = \frac{14}{15}\sqrt{5}\ \text{u.l.}}$

7. $\ln 2 = 0'69$ y $\ln 3 = 1'10$ La función de interpolación lineal pedida es la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(2 , 0'69) y B(3 , 1'10). Para obtenerla emplearemos la forma continua de la recta que pasa por el punto A$(a_1\ ,a_2)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v} = (v_1\ ,v_2)$

$$\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}$$

Como punto tomamos, por ejemplo, A$(2\,,0'69)$ y como vector director $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3\,,1'10)-(2\,,0'69)$=(1 , 0'41) sustituyendo:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-0'69}{0'41} \quad\Leftrightarrow\quad y=0'41x-0'13$$

La función de interpolación es: $\boxed{f(x)=0'41x-0'13}$

El valor estimado para $\ln 2'7$ lo obtenemos haciendo $x=2'7$

$$\ln 2'7 \cong f(2'7)=0'41\cdot 2'7-0'13=\boxed{0'977}$$

8. $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2+ax+6}$ discontinua en $x=3$

Como f es una función racional, sólo puede ser discontinua en los valores de x que anulen su denominador por lo tanto se ha de cumplir que $3^2+a\cdot 3+6=0 \;\Rightarrow\; \boxed{a=-5}$

Para saber el tipo de discontinuidad hallaremos el límite de $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ en $x=3$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{(x-2)}=6$$

Si hiciésemos $f(3)=6$ la función sería continua en $x=3$ al cumplirse $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$

$\boxed{\text{La discontinuidad es EVITABLE.}}$

9. $1+2\cdot 3^{4x-5}=67 \xrightarrow{-1} 2\cdot 3^{4x-5}=66 \xrightarrow{:2} 3^{4x-5}=33 \xrightarrow{\log} \log 3^{4x-5}=\log 33 \Rightarrow$

$(4x-5)\log 3=\log 33 \Rightarrow 4x\log 3-5\cdot\log 3=\log 33 \xrightarrow{+5\cdot\log 3} 4x\log 3=\log 33+5\cdot\log 3$

$$\xrightarrow{:4\cdot\log 3} x=\frac{\log 33+5\cdot\log 3}{4\cdot\log 3} \;\Rightarrow\; \boxed{x=2'05}$$

10. $g(x)=(2x+9)^5$

$a)$ $g'(x)=5\,(2x+9)^4\cdot 2 \;\Leftrightarrow\; \boxed{g'(x)=10\,(2x+9)^4}$

$b)$ $G(x)=\int g(x)\,dx=\int (2x+9)^5\,dx=\int \dfrac{6(2x+9)^5\cdot 2}{6\cdot 2}\,dx=\dfrac{1}{12}(2x+9)^6+C$ (con $C\in\Re$)

$$\boxed{G(x)=\frac{1}{12}(2x+9)^6+C}$$