Ejercicio 1.

Calcula el valor de las expresiones:

$$a)\ \log_8\left(\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt[4]{324}-\frac{\sqrt{50}}{2}+\sqrt[6]{512}\right) \qquad b)\ \log_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{9}+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2\sqrt{2}}-\log_5\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$$

$$a)\ \log_8\left(\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt[4]{324}-\frac{\sqrt{50}}{2}+\sqrt[6]{512}\right) = \log_8\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\sqrt[4]{2^2\cdot 3^4}-\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}+\sqrt[6]{2^9}\right)=$$

$$=\log_8\left(\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}+3\cdot\sqrt{2}-\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}+2\cdot\sqrt{2}\right) = \log_8\left(\frac{3\cdot\sqrt{2}+6\cdot\sqrt{2}-5\cdot\sqrt{2}+4\cdot\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=\log_8\left(4\cdot\sqrt{2}\right) = \log_8\left(2^{5/2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\log_8(2) = \frac{5}{2}\cdot\log_8\left(8^{1/3}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$b)\ \log_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{9}+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2\sqrt{2}}-\log_5\frac{1}{\sqrt[3]{25}} = \log_{\frac{1}{3}}3^{2/3}+\log_{\sqrt{2}}\sqrt[4]{2^3}-\log_5\frac{1}{5^{2/3}}=$$

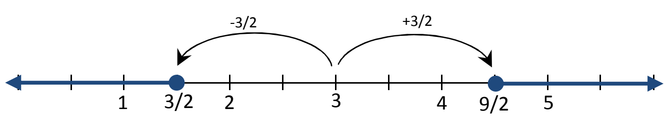
$$=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2/3}+\log_{\sqrt{2}}2^{3/4}-\log_5 5^{-2/3} = -\frac{2}{3}+\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\right)^{6/4}-\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}+\frac{6}{4}+\frac{2}{3} = \frac{3}{2}$$

Ejercicio 2.

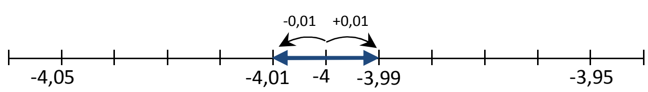
Escribe en forma de intervalo y representa en la recta real los siguientes conjuntos de números:

$$a)\ |3-x|\geq\frac{3}{2} \qquad b)\ |x+4|<10^{-2}$$

$$a)\quad |3-x|\geq\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ d(x,3)\geq\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ x\geq 3+\frac{3}{2}\quad y\quad x\leq 3-\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ x\in\left(-\infty\,,\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{9}{2}\,,+\infty\right)$$



$$b)\ |x+4|<10^{-2}\ \Rightarrow |x-(-4)|<0'01\ \Rightarrow d(x,-4)<0'01\ \Rightarrow -4-0'01<x<-4+0'01\ \Rightarrow x\in(-4'01\,,-3'99)$$



Ejercicio 3.

Calcula:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^2}+\frac{9}{n^2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{4n-3}{n^2}\right)$$

$$b)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+n}{3n^2+1}\right)^{\frac{n+1}{n^2}}$$

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^2}+\frac{9}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{4n-3}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+5+9+\cdots\cdots+(4n-3)}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{(1+4n-3)\cdot n}{2}}{n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)=2$$

$$b)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+n}{3n^2+1}\right)^{\frac{n+1}{n^2}}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2+n}{3n^2+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n^2}}\right)=\dfrac{4}{3}\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)=0\end{cases}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+n}{3n^2+1}\right)^{\frac{n+1}{n^2}}=\left(\frac{4}{3}\right)^0=1$$

Ejercicio 4.

Los ángulos interiores de un pentágono convexo están en progresión aritmética. Si sabemos que el mayor de ellos mide 156°, encuentra el valor de los demás.

La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es $180^\circ\cdot(n-2)$, *con lo que los ángulos del pentágono sumarán* 540°.

Los ángulos en progresión aritmética serán $x\,,\ x+d\,,\ x+2d\,,\ x+3d\,,\ x+4d$
como el mayor mide $156^\circ \Rightarrow x=156^\circ$ *o* $x+4d=156^\circ$
Tomamos $x=156^\circ$, *entonces* :

$$156+(156+d)+(156+2d)+(156+3d)+(156+4d)=540\Rightarrow 780+10d=540\Rightarrow d=-24$$

Los ángulos del pentágono son $156^\circ, 132^\circ, 108^\circ, 84^\circ, 60^\circ$

Ejercicio 5.

Si $A=3{,}24\cdot 10^{-15}$; $B=8{,}1\cdot 10^{5}$; $C=1{,}8\cdot 10^{-18}$; $D=2{,}4\cdot 10^{12}$, calcula el valor de $\left(\dfrac{A}{B}+C\right)\cdot D$, dando el resultado con dos cifras significativas.
Encuentra una cota para el error relativo que se ha cometido al hacer esa aproximación.

$$\left(\frac{A}{B}+C\right)\cdot D=\left(\frac{3{,}24\cdot 10^{-15}}{8{,}1\cdot 10^{5}}+1{,}8\cdot 10^{-18}\right)\cdot 2{,}4\cdot 10^{12}=\left(0{,}4\cdot 10^{-20}+1{,}8\cdot 10^{-18}\right)\cdot 2{,}4\cdot 10^{12}=$$
$$=\left(0{,}004\cdot 10^{-18}+1{,}8\cdot 10^{-18}\right)\cdot 2{,}4\cdot 10^{12}=\left(1{,}804\cdot 10^{-18}\right)\cdot 2{,}4\cdot 10^{12}=4{,}3296\cdot 10^{-6}\approx 4{,}3\cdot 10^{-6}$$

$$E_a=\left|4{,}3296\cdot 10^{-6}-4{,}3\cdot 10^{-6}\right|=2{,}96\cdot 10^{-8}$$
$$E_r=\frac{2{,}96\cdot 10^{-8}}{4{,}3296\cdot 10^{-6}}\approx 6{,}84\cdot 10^{-3}<0{,}007$$

Ejercicio 6.

La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente es 18 y la diferencia entre los dos primeros es 2. Determina la progresión.

Si puedo sumar infinitos términos de una progresión geométrica es que $|r|<1$

y en ese caso $S=\dfrac{a_1}{1-r}$

Las condiciones que nos dan son:

$$\begin{cases}\dfrac{a_1}{1-r}=18\\ a_1-a_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a_1}{1-r}=18\\ a_1-a_1\cdot r=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a_1}{1-r}=18\\ a_1(1-r)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=18\cdot\dfrac{2}{a_1}\\ 1-r=\dfrac{2}{a_1}\end{cases}\Rightarrow (a_1)^2=36\Rightarrow\begin{cases}a_1=6\\ a_1=-6\end{cases}$$

$$Si\ \ a_1=-6\ \Rightarrow 1-r=-\frac{1}{3}\Rightarrow r=\frac{4}{3}\ \ que\ no\ es\ posible\ por\ ser\ mayor\ que\ 1.$$

$$Si\ \ a_1=6\ \Rightarrow\ 1-r=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ r=\frac{2}{3}\ ;\ y\ la\ progresión\ será:\ 6\ ,\ 4\ ,\ \frac{8}{3}\ ,\ \frac{16}{9}\ ,\ \frac{32}{27}\ ,\ \frac{64}{81}\ ,\ \cdots$$

$$a_n=6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\ \Rightarrow\ a_n=\frac{2^n}{3^{n-2}}$$