1 Números reales

ACTIVIDADES INICIALES

1.I. Realiza las siguientes operaciones.

a) $2 - 3 \cdot (-4) + 5 \cdot (2 \cdot 3 - 5) - 1$

b) $-3 + \left[5(2^{-3} - 3) - \left(\sqrt{25} - 8\right)\left(2^2 - \sqrt{4}\right)\right] + 10$

a) $2 - 3 \cdot (-4) + 5 \cdot (2 \cdot 3 - 5) - 1 = 2 + 12 + 5 \cdot (6 - 5) - 1 = 2 + 12 + 5 - 1 = 18$

b) $-3 + \left(5 \cdot (2^{-3} - 3) - \left(\sqrt{25} - 8\right) \cdot \left(2^2 - \sqrt{4}\right)\right) + 10 = -3 + \left(5 \cdot \left(\frac{1}{8} - 3\right) - (5 - 8) \cdot (4 - 2)\right) + 10 =$

$= -3 + \left(5 \cdot \left(-\frac{23}{8}\right) + 6\right) + 10 = -3 - \frac{115}{8} + 6 + 10 = -\frac{11}{8}$

1.II. Simplifica las expresiones siguientes.

a) $\dfrac{3^{3+\sqrt{9}} \cdot \sqrt{2^2 + 5}}{2 \cdot (-3) - 5}$

b) $\dfrac{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot (4^3 - 4^2)^{-1}}{6^{-2}}$

a) $\dfrac{3^{3+\sqrt{9}} \cdot \sqrt{2^2 + 5}}{2 \cdot (-3) - 5} = \dfrac{3^6 \cdot 3}{-6 - 5} = -\dfrac{3^7}{11} = -\dfrac{2187}{11}$

b) $\dfrac{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot (4^3 - 4^2)^{-1}}{6^{-2}} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot (3 \cdot 4^2)^{-1}}{6^{-2}} = \dfrac{2^2 \cdot 3^{-1} \cdot 2^{-4}}{2^{-2} \cdot 3^{-2}} = 3$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.1. Resuelve estas operaciones.

a) $\dfrac{2}{1 + \frac{1}{2}}$

b) $\dfrac{2}{1 + \frac{1}{6}}$

a) $\dfrac{2}{1 + \frac{1}{2}} = \dfrac{2}{\frac{3}{2}} = \dfrac{4}{3} = 1{,}333... = 1{,}\widehat{3}$

b) $\dfrac{2}{1 + \frac{1}{6}} = \dfrac{2}{\frac{7}{6}} = \dfrac{12}{7} = 1{,}\widehat{714285}$

1.2. Halla la fracción irreducible que corresponde a los siguientes números racionales.

a) $25{,}25$

b) $25{,}\widehat{25}$

c) $25{,}2\widehat{5}$

a) $25{,}25 = \dfrac{2525}{100} = \dfrac{101}{4}$

b) $N = 25{,}\widehat{25} = 25{,}252525... \Rightarrow \begin{cases} 100N = 2525{,}252525... \\ N = 25{,}2525225... \end{cases} \Rightarrow 99N = 2500 \Rightarrow N = \dfrac{2500}{99}$

c) $N = 25{,}2\widehat{5} = 25{,}2555... \Rightarrow \begin{cases} 100N = 2525{,}555... \\ 10N = 252{,}555... \end{cases} \Rightarrow 90N = 2273 \Rightarrow N = \dfrac{2273}{90}$

1.3. Calcula la fracción irreducible que representa el resultado de: $25{,}25 + 25{,}\widehat{25} + 25{,}2\widehat{5}$.

$25{,}25 + 25{,}\widehat{25} + 25{,}2\widehat{5} = \dfrac{101}{4} + \dfrac{2500}{99} + \dfrac{2273}{90} = \dfrac{150\,001}{1980}$

1.4. Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{15}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}$

b) $\dfrac{14}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}$

a) $\dfrac{15}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}} = \dfrac{15}{1+\dfrac{1}{\dfrac{3}{2}}} = \dfrac{15}{1+\dfrac{2}{3}} = \dfrac{15}{\dfrac{5}{3}} = \dfrac{3 \cdot 15}{5} = 9$

b) $\dfrac{14}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}} = \dfrac{14}{1+\dfrac{1}{\dfrac{4}{3}}} = \dfrac{14}{1+\dfrac{3}{4}} = \dfrac{14}{\dfrac{7}{4}} = \dfrac{4 \cdot 14}{7} = 8$

1.5. ¿Cuál de estas expresiones no equivale a $a - b + c$?

a) $(a - b) + c$

b) $a - (b + c)$

c) $a + (c - b)$

La expresión del apartado *b*, que equivale a $a - b - c$.

1.6. Razona con ejemplos si son ciertas las siguientes afirmaciones.

a) La suma de dos irracionales es siempre irracional.

b) El producto de dos irracionales es siempre un número irracional.

Es falso. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son dos números irracionales, y su suma es 0, número racional.
Es falso. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son dos números irracionales, y su producto es -2, número racional.

1.7. Se quiere vallar un campo rectangular. Se sabe que uno de sus lados mide tres quintas partes de la medida del otro. Además, la diagonal mide 30 m. Calcula el precio que se deberá pagar por hacer el vallado si cada metro de valla cuesta 25 euros y se desperdicia un 10% del material empleado.

Los lados miden a y $\dfrac{3a}{5}$. Entonces: $D = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{3a}{5}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{9a^2}{25}} = \sqrt{\dfrac{34a^2}{25}} = 30 \Rightarrow a = 25{,}725$ m

El perímetro mide $2 \cdot \left(a + \dfrac{3a}{5}\right) = 82{,}32$ m.

La valla costaría $82{,}32 \cdot 25 = 2058$ euros; pero como se desperdicia el 10% del material, esta cantidad representa el 90% del precio total. Habría que comprar por un valor de $2058 : 0{,}90 = 2286{,}67$ euros.

1.8. Ordena de menor a mayor en cada caso.

a) $\dfrac{11}{4}, \dfrac{68}{25}, \dfrac{14}{5}$ y $\dfrac{27}{10}$

b) $1{,}23$, $1{,}2\widehat{3}$ y $1{,}\widehat{23}$

c) $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[3]{3}$ y $\sqrt{2}$

d) $2{,}\widehat{9}$, 3 y $3{,}0\widehat{1}$

a) $\dfrac{11}{4} = \dfrac{275}{100}$; $\dfrac{68}{25} = \dfrac{272}{100}$; $\dfrac{14}{5} = \dfrac{280}{100}$ y $\dfrac{27}{10} = \dfrac{270}{100} \Rightarrow \dfrac{27}{10} < \dfrac{68}{25} < \dfrac{11}{4} < \dfrac{14}{5}$

b) $1{,}23 < 1{,}232323\ldots < 1{,}2333\ldots \Rightarrow 1{,}23 < 1{,}\widehat{23} < 1{,}2\widehat{3}$

c) $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$, $\sqrt[3]{3} = 1{,}4422\ldots \Rightarrow \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

d) $2{,}99\ldots < 3 < 3{,}011\ldots \Rightarrow 2{,}\widehat{9} < 3 < 3{,}0\widehat{1}$

1.9. Sean a y b dos números reales negativos. Si $a \leqslant b$, demuestra que el inverso de a es mayor o igual que el inverso de b.

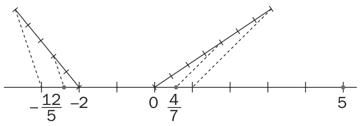
$a \leqslant b \Rightarrow a \cdot \dfrac{1}{a} \leqslant b \cdot \dfrac{1}{a} \Rightarrow 1 \leqslant \dfrac{b}{a} \Rightarrow 1 \cdot \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{1}{b} \Rightarrow \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$

1.10. A partir del desarrollo de $(x - y)^2$, siendo x e y no nulos, demuestra que $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$.

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geqslant 2xy \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$$

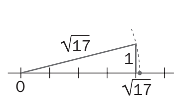
1.11. Representa en la recta real los siguientes números.

a) 5 b) $\dfrac{4}{7}$ c) -2 d) $-\dfrac{12}{5}$

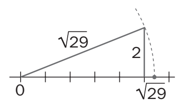


1.12. Escribe los números 17 y 29 como suma de dos cuadrados y representa $\sqrt{17}$ y $\sqrt{29}$ en la recta real.

$17 = 4^2 + 1^2$

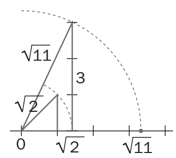


$29 = 5^2 + 2^2$



1.13. Representa en la recta real: $\sqrt{11}$.

$$\sqrt{11} = \sqrt{2 + 9} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\left(\sqrt{1^2 + 1^2}\right)^2 + 3^2}$$



1.14. Desarrolla el valor de la expresión $2x - 3 + |2x - 3|$ y calcúlala para los casos $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$.

$$2x - 3 + |2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 + 2x - 3 & \text{si } 2x - 3 \geqslant 0 \\ 2x - 3 - (2x - 3) & \text{si } 2x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 4x - 6 & \text{si } x \geqslant \dfrac{3}{2} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Para $x = -1$, el valor de la expresión es 0.

Para $x = 0$, el valor de la expresión es 0.

Para $x = 2$, el valor de la expresión es $4 \cdot 2 - 6 = 2$.

1.15. Desarrolla el valor de las siguientes expresiones.

a) $|x + 2| + |x + 3|$ b) $x + |x + 2| + |x + 3|$

a) $|x + 2| + |x + 3|$. Los valores absolutos que intervienen se anulan para $x = -2$ y $x = -3$.

$$|x + 2| + |x + 3| = \begin{cases} -(x + 2) - (x + 3) & \text{si } x \leqslant -3 \\ -(x + 2) + x + 3 & \text{si } -3 < x < -2 \\ x + 2 + x + 3 & \text{si } x \geqslant -2 \end{cases} = \begin{cases} -2x - 5 & \text{si } x \leqslant -3 \\ 1 & \text{si } -3 < x < -2 \\ 2x + 5 & \text{si } x \geqslant -2 \end{cases}$$

b) $x + |x + 2| + |x + 3|$. Los valores absolutos que intervienen se anulan para $x = -2$ y $x = -3$.

$$x + |x + 2| + |x + 3| = \begin{cases} x - (x + 2) - (x + 3) & \text{si } x \leqslant -3 \\ x - (x + 2) + x + 3 & \text{si } -3 < x < -2 \\ x + x + 2 + x + 3 & \text{si } x \geqslant -2 \end{cases} = \begin{cases} -x - 5 & \text{si } x \leqslant -3 \\ x + 1 & \text{si } -3 < x < -2 \\ 3x + 5 & \text{si } x \geqslant -2 \end{cases}$$