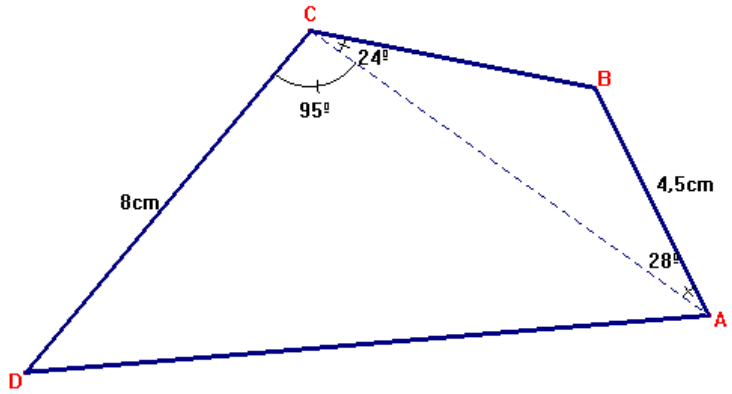
EXAMEN DE TRIGONOMETRÍA

1. Resuelve la inecuación y los sistemas de inecuaciones siguientes:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x-y\le 3 \\ x+3>1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x-1<\dfrac{5x}{3}+1 \\ \dfrac{x+5}{2}\le x-\dfrac{1}{2} \\ 5-2(x+1)<3 \end{array}\right\}$ c) $\dfrac{5x+10}{x-3}\ge 0$ (2 puntos)

2. Obtén el perímetro del cuadrilátero de la figura: (2,5 puntos)



3. Sabemos que $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{3}{5}$ con α en el primer cuadrante $\cos\beta=-\dfrac{2}{3}$ con β en el tercer cuadrante. (2,5 puntos)

Sin hallar el valor de los ángulos y expresando el resultado con fracciones y radicales, calcula:

a) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ b) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ c) $\cos 2\alpha$ d) $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$

4. Resuelve la ecuación: (1,5 puntos)

$$\operatorname{sen} 2x-2\cos^2 x=0$$

5. Comprueba la identidad: (1,5 puntos)

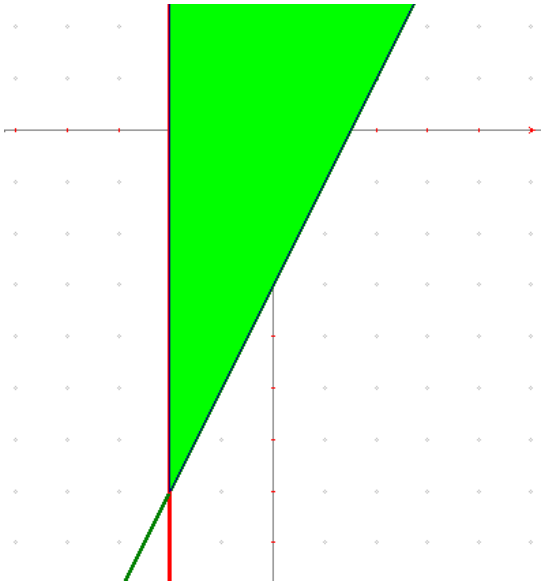
$$\frac{2\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x}=\cos x-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$

SOLUCIONES

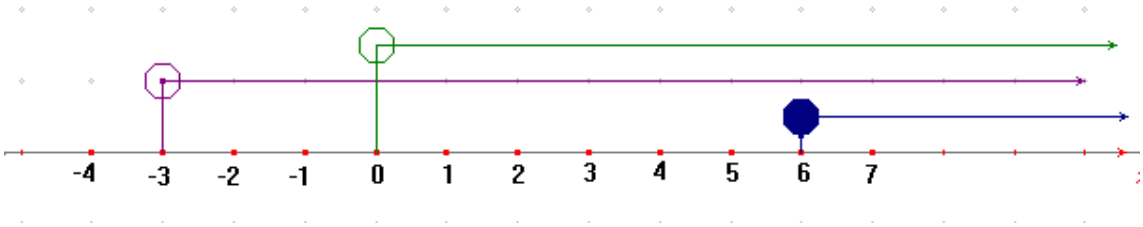
1. Resuelve la inecuación y los sistemas de inecuaciones siguientes:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x-y\le 3 \\ x+3>1 \end{array}\right\}$ gráficamente, representamos primero las rectas correspondientes,

$\left.\begin{array}{l} 2x-y=3 \\ x+3=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2x-3 \\ x=-2 \end{array}\right.$, luego los semiplanos solución de cada una de las inecuaciones y las intersección de ambos semiplanos será la solución del sistema, teniendo en cuenta que entra en la solución la semirrecta $y=2x-3$ (en verde)



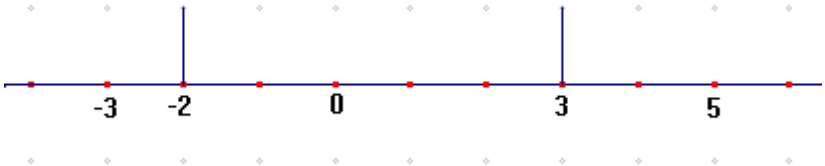
b) $\left.\begin{array}{l} x-1<\dfrac{5x}{3}+1 \\ \dfrac{x+5}{2}\le x-\dfrac{1}{2} \\ 5-2(x+1)<3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x-3<5x+3 \\ x+5\le 2x-1 \\ 5-2x-2<3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x-5x<3+3 \\ x-2x\le -1-5 \\ -2x<3-5+2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x<6 \\ -x\le -6 \\ -2x<0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x>-3 \\ x\ge 6 \\ x>0 \end{array}\right\}$



c) [illegible] $+\ \dfrac{0}{[illegible]} \ge 0$ - +

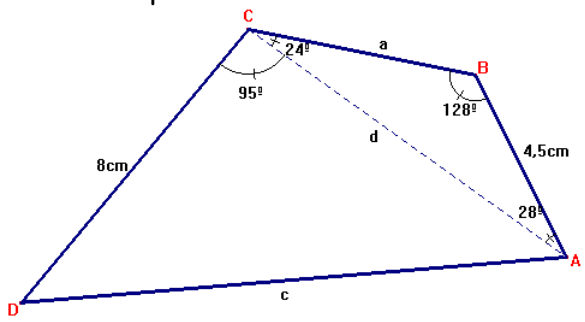
Solución del sistema: $[6,+\infty)$

c) $\dfrac{5x+10}{x-3}\ge 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x+10=0 \Rightarrow x=-2 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{array}\right.$ estudiamos el signo por intervalos:



Solución: $(-\infty,-2]\cup(3,+\infty)$

2. Obtén el perímetro del cuadrilátero de la figura:



En el triángulo ABC, tenemos el ángulo B:

$\hat{B} = 180^o - (24^o + 28^o) = 128^o$

Aplicamos el teorema del seno para hallar los otros dos lados del triángulo a y d:

$$\frac{4,5}{sen24^o} = \frac{a}{sen28^o} \Rightarrow a = 5,2cm$$

$$\frac{4,5}{sen24^o} = \frac{d}{sen128^o} \Rightarrow d = 8,7cm$$

Ahora nos vamos al triángulo ACD, en el que conocemos dos lados y el ángulo comprendido, aplicamos el teorema del coseno para hallar el lado c:

$c^2 = 8^2 + 8,7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8,7 \cdot \cos 94^o \Rightarrow c = 12,3cm$

Perímetro: $P = 8 + 12,3 + 4,5 + 5,2 = 30cm$

3. Sabemos que $sen\alpha = \frac{3}{5}$ con α en el primer cuadrante $\cos\beta = -\frac{2}{3}$ con β en el tercer cuadrante.

Empezamos hallando las razones de α y β:

$$sen\alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5} \rightarrow tg\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos\beta = -\frac{2}{3} \rightarrow sen^2\beta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \rightarrow sen\beta = -\frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow tg\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

a) $sen(\alpha + \beta) = sen\alpha\cos\beta + sen\beta\cos\alpha = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \cdot \frac{4}{5} = -\frac{6 + 4\sqrt{5}}{15}$

b) $tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{3 - 2\sqrt{5}}{4}}{\frac{8 + 3\sqrt{5}}{8}} = \frac{6 - 4\sqrt{5}}{8 + 3\sqrt{5}}$

c) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16 - 9}{25} = \frac{7}{25}$

d) $tg\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\beta}{1 + \cos\beta}} = \pm\sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)}} = \pm\sqrt{\frac{5}{1}} = -\sqrt{5}$ ($\frac{\beta}{2}$ está en el II cuadrante)

4. $\text{sen}\,2x - 2\cos^2 x = 0 \rightarrow 2\,\text{sen}\,x\cos x - 2\cos^2 x = 0 \rightarrow 2\cos x(\text{sen}\,x - \cos x) = 0$

$$\left\langle \begin{array}{l} 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 90^{o} + 360^{o}k \\ x = 270^{o} + 360^{o}k \end{array} \right. \qquad k \in Z \\ \\ \text{sen}\,x - \cos x = 0 \Rightarrow \text{sen}\,x = \cos x \Rightarrow \text{tg}x = 1 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 45^{o} + 360^{o}k \\ x = 225^{o} + 360^{o}k \end{array} \right. \end{array} \right.$$

5. Comprueba las identidades:

$$\frac{2\,\text{sen}\,x}{\text{tg}\,2x} = \cos x - \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} \rightarrow \frac{2\,\text{sen}\,x}{\dfrac{\text{sen}\,2x}{\cos 2x}} = \frac{2\,\text{sen}\,x \cdot \cos 2x}{\text{sen}\,2x} = \frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos x}$$

$$\frac{2\,\text{sen}\,x \cdot (\cos^2 x - \text{sen}^2 x)}{2\,\text{sen}\,x\cos x} = \frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos x} \rightarrow \frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos x}$$