51631

ASÍNTOTAS

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Estudia las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-3}$.

- <u>Asíntotas horizontales</u>

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2=2\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}2=2\end{array}\right\}\Rightarrow\quad y=2 \text{ es una asíntota horizontal de } f$$

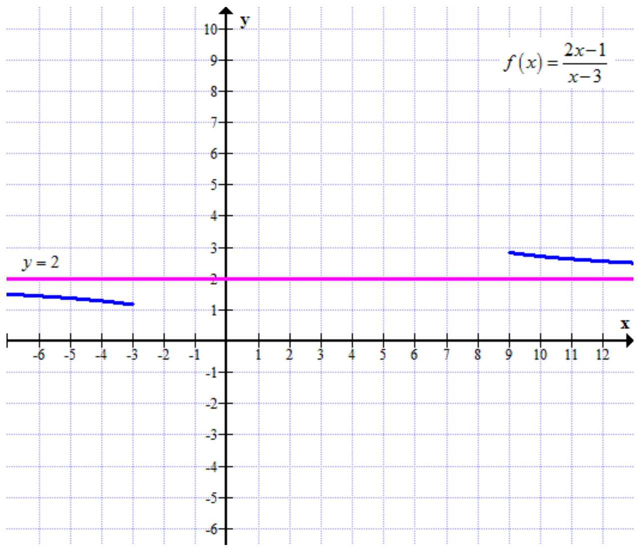
(por ambos lados)

Posición de la curva respecto de la asíntota

Le damos un valor lo suficientemente elevado $(x\to+\infty)$.

$$f(100)=\frac{2\cdot100-1}{100-3}=\frac{199}{97}\simeq 2.0515>2$$

Por lo tanto, por la derecha $(x\to+\infty)$, la curva está por encima de la asíntota.



Le damos un valor lo suficientemente bajo $(x\to-\infty)$.

$$f(-100)=\frac{2\cdot(-100)-1}{-100-3}=\frac{-201}{-103}=\frac{201}{103}\simeq 1{,}9515<2$$

Por lo tanto, por la izquierda $(x\to-\infty)$, la curva está por debajo de la asíntota.

- <u>Asíntotas verticales</u>

  Las funciones racionales pueden tener asíntotas verticales en los valores que anulen a su denominador.

$$x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=3$$

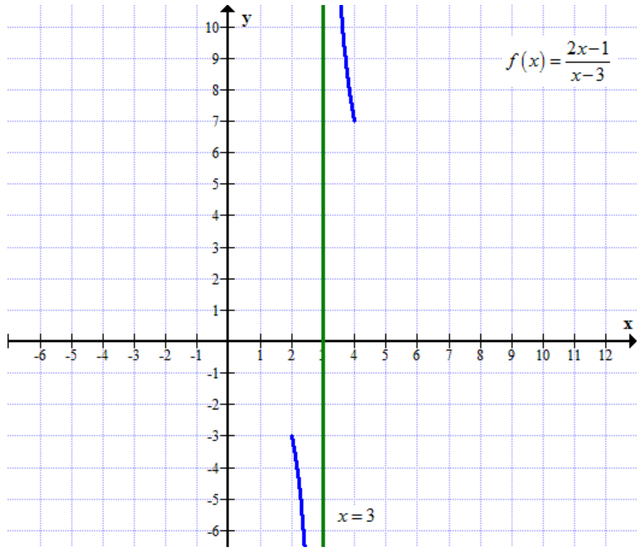
Estudiamos los límites laterales en $x=3$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x-1}{x-3}=\dfrac{5}{0^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x-1}{x-3}=\dfrac{5}{0^-}=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x=3 \text{ es una asíntota vertical de } f$$

(por ambos lados)

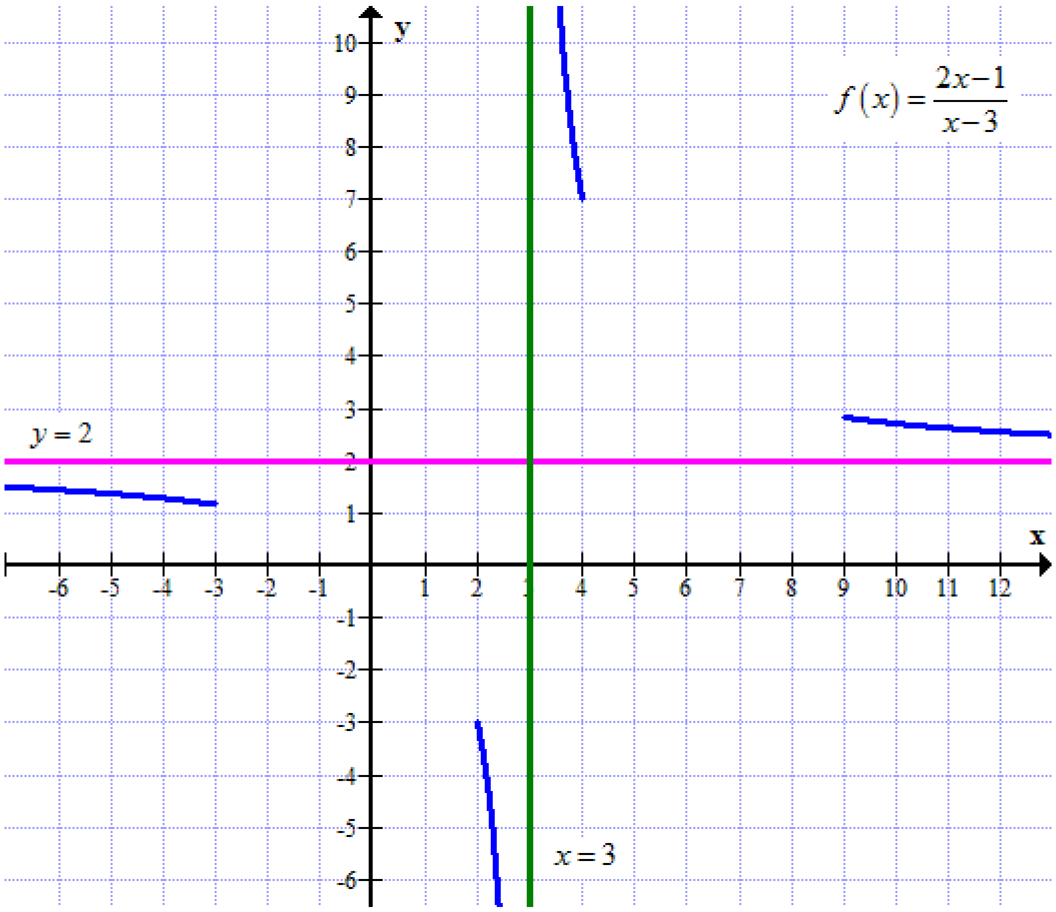
Posición de la curva respecto de la asíntota

Queda determinada por los límites laterales

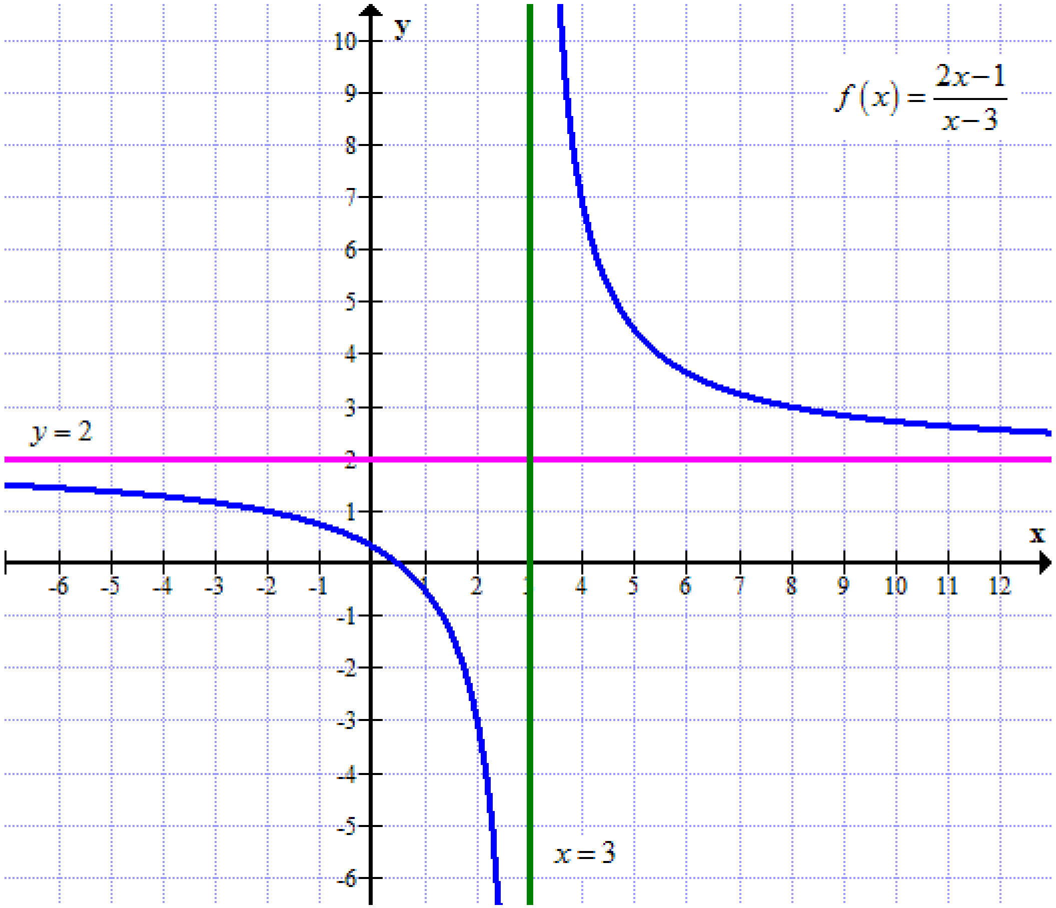


- <u>Asíntotas oblicuas</u>

  No tiene por tener asíntotas horizontales por ambos lados.



$f(x)=\dfrac{2x-1}{x-3}$
$y=2$
$x=3$
y
x



$f(x)=\dfrac{2x-1}{x-3}$
$y=2$
$x=3$
x
y

2) Estudia las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$.

- <u>Asíntotas horizontales</u>

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}1=1\end{array}\right\}\Rightarrow\ y=1 \text{ es una asíntota horizontal de } f$$

(por ambos lados)

Posición de la curva respecto de la asíntota

Le damos un valor lo suficientemente elevado $(x\to+\infty)$.

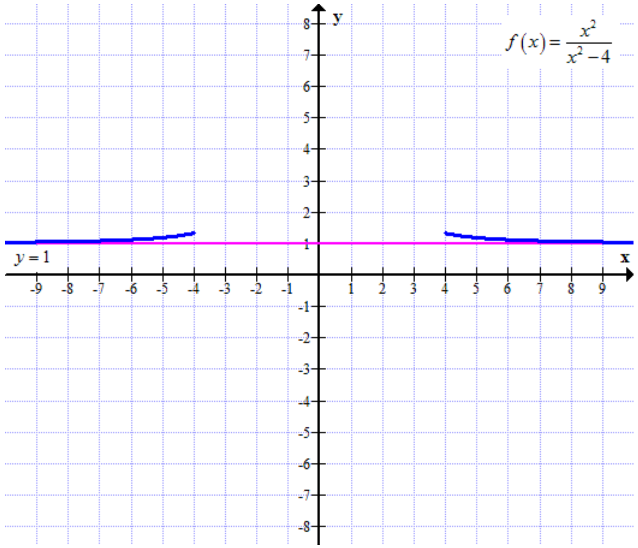
$$f(10)=\frac{10^2}{10^2-4}=\frac{100}{96}=\frac{25}{24}\simeq 1{,}0417>1$$

Por lo tanto, por la derecha $(x\to+\infty)$, la curva está por encima de la asíntota.

Le damos un valor lo suficientemente bajo $(x\to-\infty)$.

$$f(10)=\frac{(-10)^2}{(-10)^2-4}=\frac{100}{96}=\frac{25}{24}\simeq 1{,}0417>1$$

Por lo tanto, por la izquierda $(x\to-\infty)$, la curva está por encima de la asíntota.



- <u>Asíntotas verticales</u>
  Posibles asíntotas verticales

$$x^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 2$$

$x=2$

Estudiamos los límites laterales en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2}{x^2-4}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2}{x^2-4}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \quad x=2 \text{ es una asíntota vertical de } f$$

(por ambos lados)

Posición de la curva respecto de la asíntota

Queda determinada por los límites laterales

$x=-2$

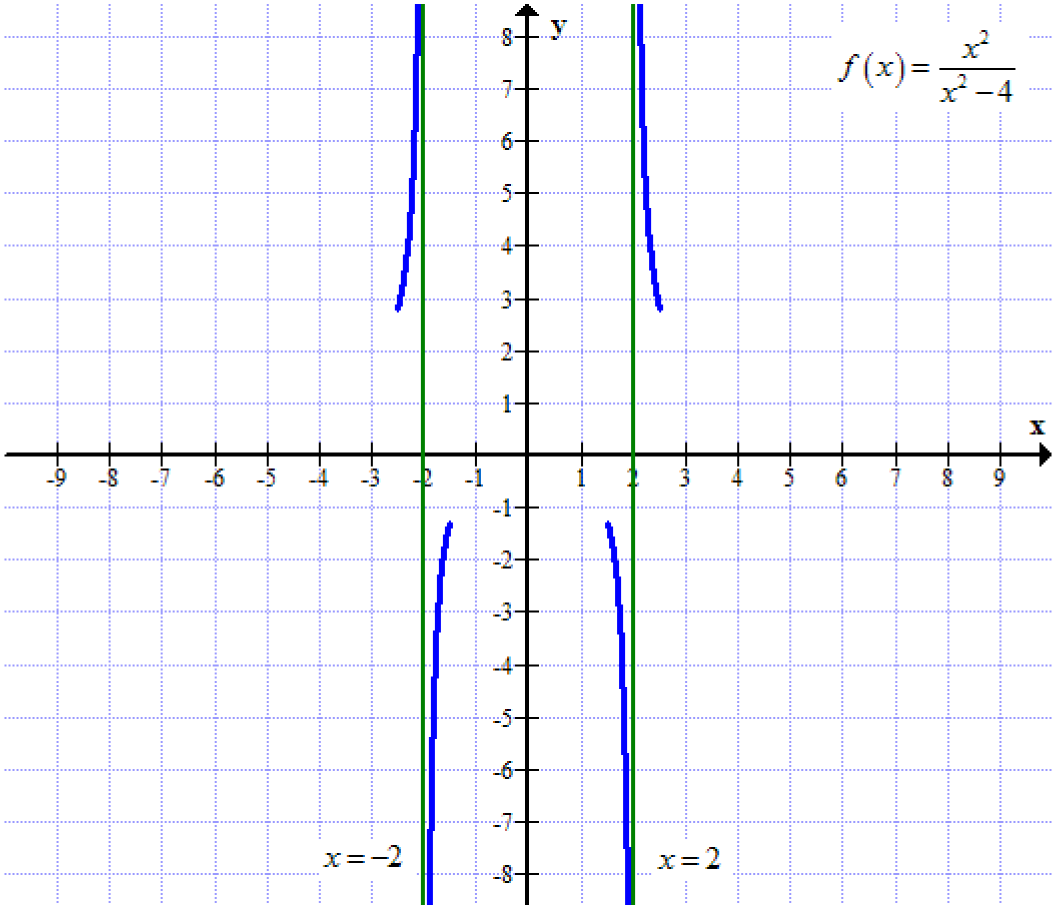
Estudiamos los límites laterales en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2}{x^2-4}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^2}{x^2-4}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \quad x=-2 \text{ es una asíntota vertical de } f$$

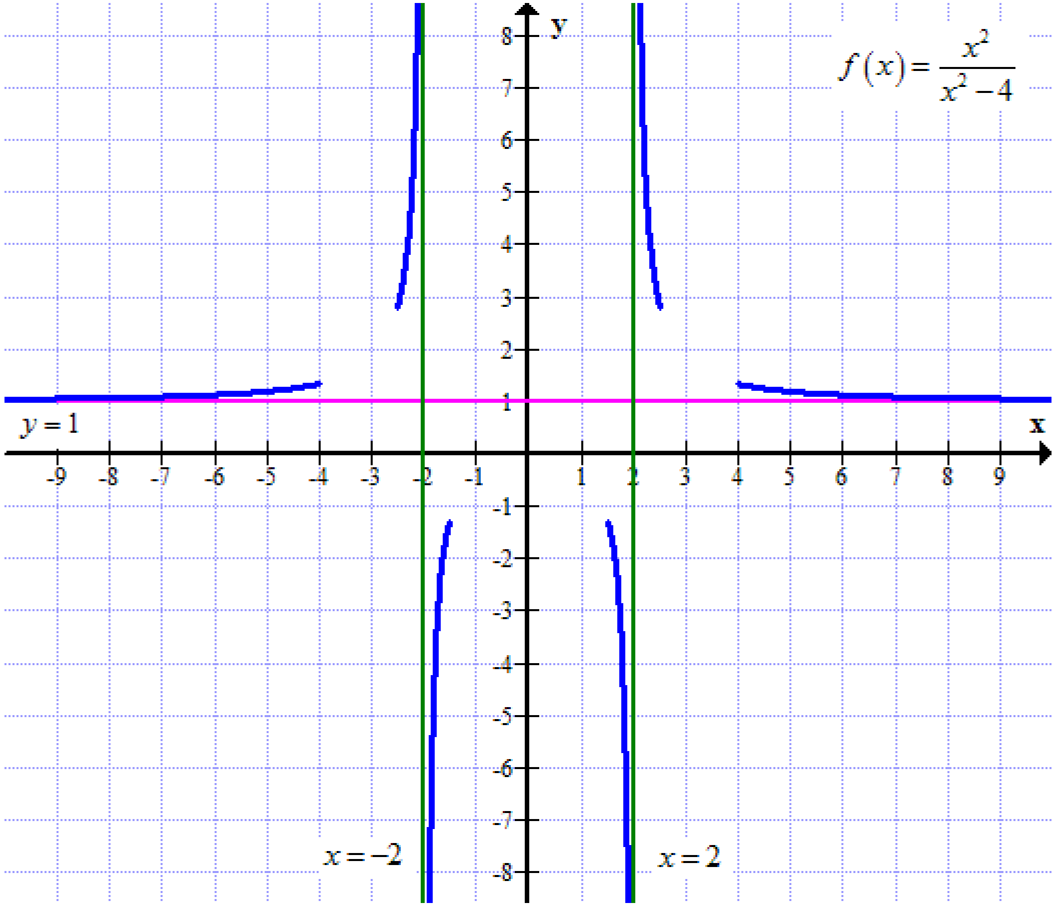
(por ambos lados)

Posición de la curva respecto de la asíntota

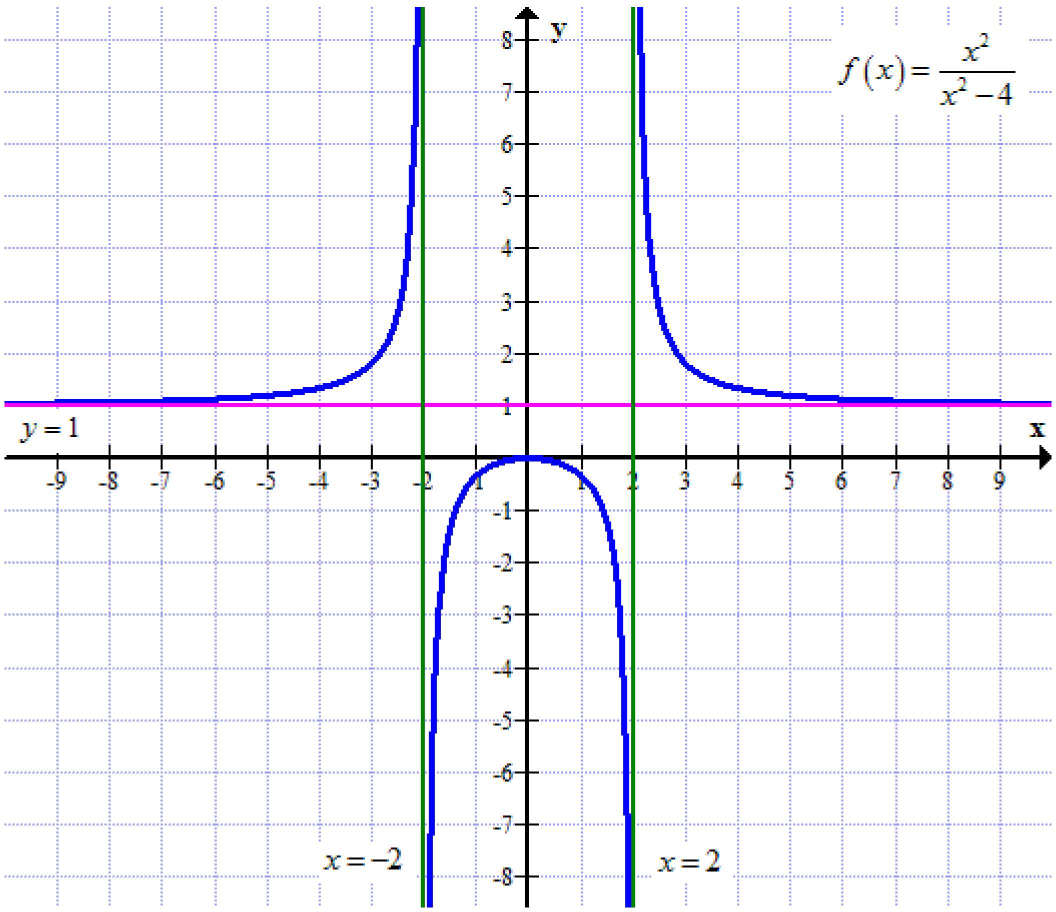
Queda determinada por los límites laterales



- <u>Asíntotas oblicuas</u>
  No tiene por tener asíntotas horizontales por ambos lados.



y
x
$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$
$y=1$
$x=-2$
$x=2$
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9



$f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$
y
x
$y=1$
$x=-2$
$x=2$

3) Estudia las asíntotas de la función $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4}{x-1}$.

- <u>Asíntotas horizontales</u>

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \quad f \text{ no tiene asíntotas horizontales}$$

Como no tiene asíntotas horizontales, puede tener asíntotas oblicuas.

- <u>Asíntotas verticales</u>

Posible asíntota vertical

$$x-1=0 \quad\Rightarrow\quad x=1$$

Estudiamos los límites laterales en $x=3$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-4}{x-1}=\dfrac{-3}{0^+}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-4}{x-1}=\dfrac{-3}{0^-}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \quad x=1 \text{ es una asíntota vertical de } f$$

(por ambos lados)

Posición de la curva respecto de la asíntota

Queda determinada por los límites laterales

- <u>Asíntotas oblicuas</u>

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2-4}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{x^2-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2-4}{x-1} - x \right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-4}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 = 1$$

Por lo tanto,

$y = x + 1$ es una asíntota oblicua de *f* por ambos lados

Posición de la curva respecto de la asíntota

Comparamos la función $f(x)$ con la asíntota $a(x) = x + 1$

Le damos un valor lo suficientemente elevado $(x \to +\infty)$.

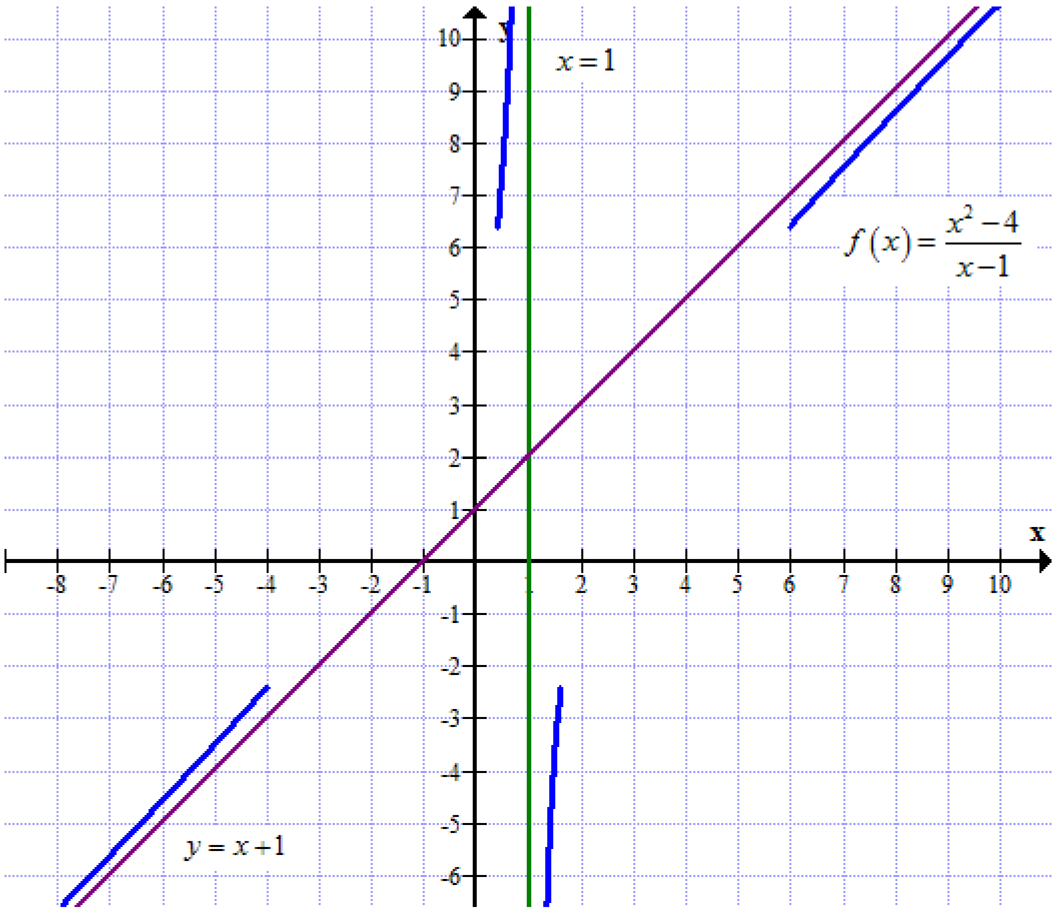
$$\left.\begin{array}{l} f(10) = \dfrac{10^2-4}{10-1} = \dfrac{96}{9} = \dfrac{32}{3} \simeq 10,6667 \\ a(10) = 10 + 1 = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(10) < a(10)$$

Por lo tanto, por la derecha $(x \to +\infty)$, la curva está por debajo de la asíntota.

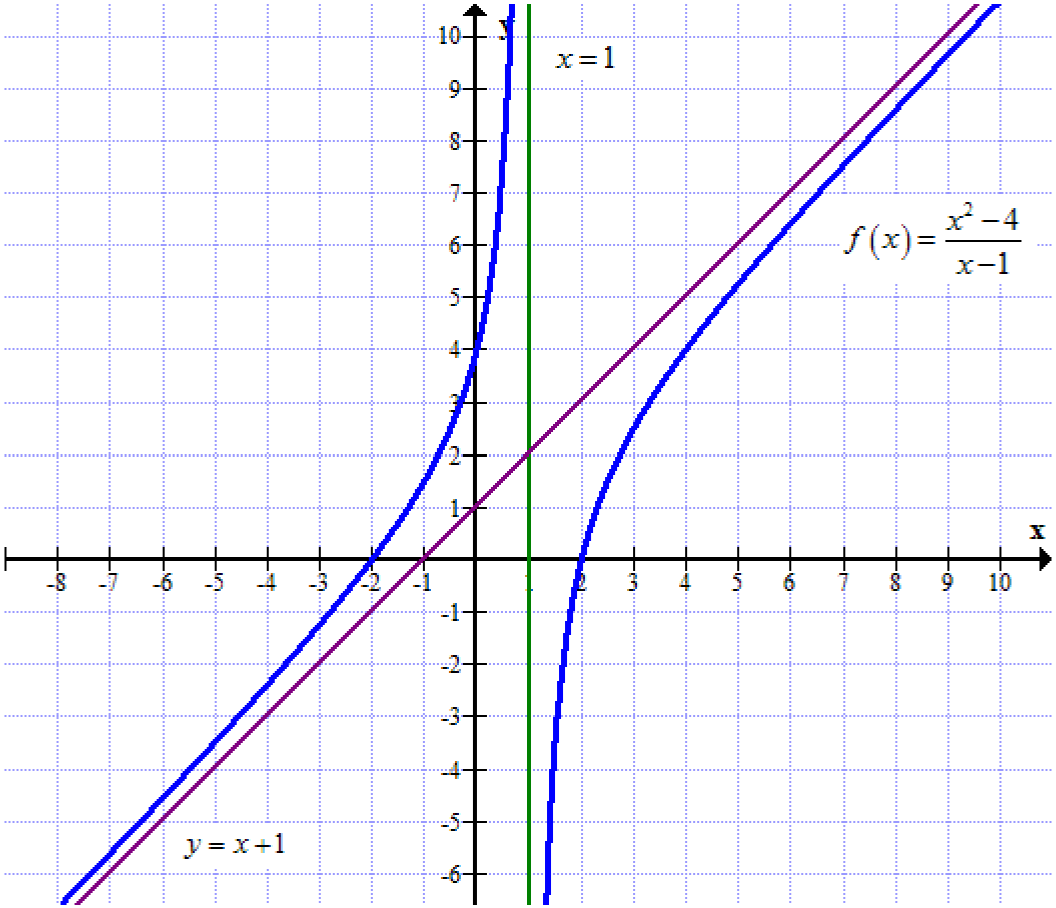
Le damos un valor lo suficientemente bajo $(x \to -\infty)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-10) = \dfrac{(-10)^2-4}{-10-1} = \dfrac{96}{-11} \simeq -8,7273 \\ a(10) = -10 + 1 = -9 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(-10) > a(10)$$

Por lo tanto, por la izquierda $(x \to -\infty)$, la curva está por encima de la asíntota.



$x = 1$
$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$
$y = x + 1$
x
y



y
x
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
$x=1$
$f(x)=\frac{x^2-4}{x-1}$
$y=x+1$