EJERCICIOS RESUELTOS (TEOREMAS SENO Y COSENO)

1.- Resuelve el triángulo ABC, del que se conocen los siguientes datos (2 ángulos y el lado común):

$\hat{A} = 60^\circ \quad ; \quad \hat{B} = 40^\circ \quad ; \quad c = 5\,cm$

Solución:

(Existe un único triángulo con estos datos)

Como se conocen dos ángulos: $\hat{A}$ *y* $\hat{B}$, *se halla* $\hat{C}$:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$$

Y, aplicando el teorema del seno, se hallan los lados a y b:

$$\frac{a}{sen\,60^\circ} = \frac{5}{sen\,80^\circ} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5 \cdot sen\,60^\circ}{sen\,80^\circ} \approx 4{,}397\,cm$$

$$\frac{b}{sen\,40^\circ} = \frac{5}{sen\,80^\circ} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{5 \cdot sen\,40^\circ}{sen\,80^\circ} \approx 3{,}264\,cm$$

2.- Resuelve el triángulo ABC, del que se conocen los siguientes datos (2 lados y el ángulo comprendido):

$\hat{A} = 40^\circ \quad ; \quad b = 7\,cm \quad ; \quad c = 10\,cm$

Solución:

(Existe un único triángulo con estos datos)

Aplicando el teorema del coseno, se determina el lado a:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

$$a^2 = 7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \cos 40^\circ \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \cos 40^\circ} = 6{,}46\,cm$$

El ángulo $\hat{B}$ se determina aplicando el teorema del seno:

$$\frac{6{,}46}{sen\,40^\circ} = \frac{7}{sen\,\hat{B}} \quad \Rightarrow \quad sen\,\hat{B} = \frac{7 \cdot sen\,40^\circ}{6{,}46} \approx 0{,}6965 \quad \Rightarrow \quad \hat{B} = arc\,sen\;0{,}6965 = 44^\circ\,08'54''$$

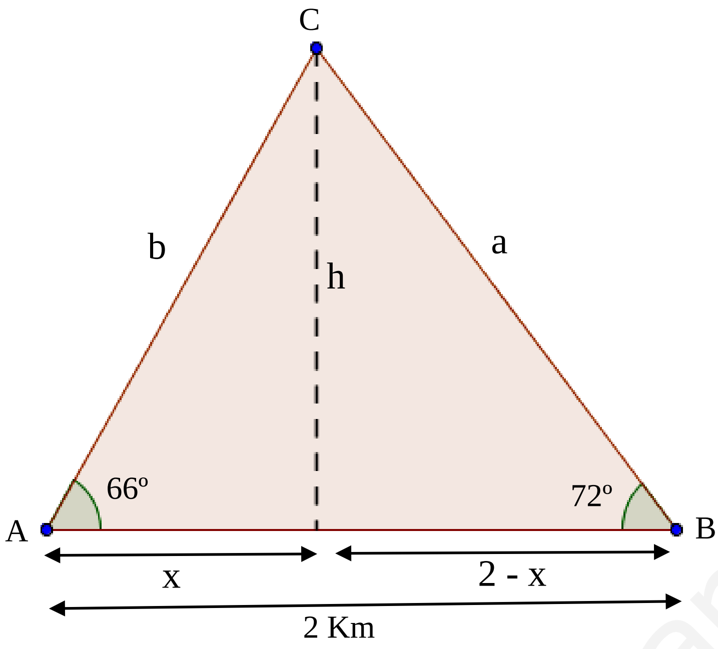
o bien, aplicando el teorema del coseno:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B} \quad \Rightarrow \quad \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \quad \Rightarrow \quad \hat{B} = 44^\circ\,08'54''$$

Ya solamente nos resta hallar el ángulo $\hat{C}$:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 40^\circ - 44^\circ\,08'54'' = 95^\circ\,51'06''$$

3. Dos individuos A y B observan un globo que se eleva verticalmente. La distancia entre los individuos es de 2 km. En cierto momento, los ángulos de elevación del globo desde los observadores son 66º y 72º, respectivamente. Determina a qué altura se encuentra el globo, en ese momento, y la distancia a cada observador.



Resolveremos el problema utilizando el método de la doble observación (o de las tangentes):

$$\left.\begin{array}{l} tg\,66^o = \dfrac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad h = x\cdot tg\,66^o \\ tg\,72^o = \dfrac{h}{2-x} \quad \Rightarrow \quad h = (2-x)\cdot tg\,72^o \end{array}\right\} \Rightarrow$$ igualando ambas expresiones:

$$x\cdot tg\,66^o = (2-x)\cdot tg\,72^o$$
$$x\cdot tg\,66^o = 2\cdot tg\,72^o - x\cdot tg\,72^o$$
$$x\cdot tg\,66^o + x\cdot tg\,72^o = 2\cdot tg\,72^o$$
$$x\cdot (tg\,66^o + tg\,72^o) = 2\cdot tg\,72^o$$
$$x = \frac{2\cdot tg\,72^o}{tg\,66^o + tg\,72^o} = 1{,}156\,Km$$
$$h = x\cdot tg\,66^o = 1{,}156\cdot tg\,66^o = 2{,}6\,Km$$

$$a = \sqrt{h^2 + (2-x)^2} = 2{,}7\,Km$$
$$b = \sqrt{h^2 + x^2} = 2{,}8\,Km$$

Como este año ya sabemos resolver cualquier triángulo podemos utilizar otro procedimiento para resolver este problema:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o \quad \Rightarrow \quad \hat{C} = 180^o - \hat{A} - \hat{B} = 180^o - 66^o - 72^o = 42^o$$

Calculamos a y b aplicando el teorema del seno:

$$\frac{c}{sen\,\hat{C}} = \frac{a}{sen\,\hat{A}} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{c\cdot sen\,\hat{A}}{sen\,\hat{C}} = \frac{2\cdot sen\,66^o}{sen\,42^o} = 2{,}73\,Km$$

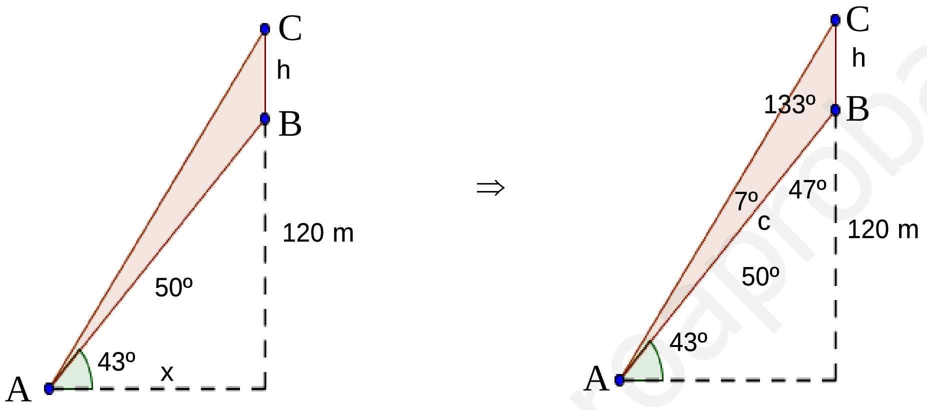
$$\frac{c}{sen\,\hat{C}}=\frac{b}{sen\,\hat{B}} \quad \Rightarrow \quad b=\frac{c\cdot sen\,\hat{B}}{sen\,\hat{C}}=\frac{2\cdot sen\ 72^{o}}{sen\,42^{o}}=2{,}84\,Km$$

Finalmente se calcula h: $\left(h=b\cdot sen\,66^{o} \quad ó \quad h=a\cdot sen\,72^{o}\right)$

$$h=b\cdot sen\,66^{o}=2{,}6\,km$$

Como vemos, este 2º método, es mucho más fácil.

4.- Una antena de televisión se encuentra situada sobre una colina. Desde un punto A (en el terreno llano) el extremo superior de la antena se ve bajo un ángulo de 50º y el extremo inferior bajo un ángulo de 43º. Si la colina tiene una altura de 120 metros, calcula la altura de la antena.



Se calcula el lado c:

$$sen\ 43^{o}=\frac{120}{c} \quad \Rightarrow \quad c=\frac{120}{sen\,43^{o}}=175{,}95\,m$$

Ahora se procede igual que antes:

Se calcula el ángulo $\hat{C}=180^{o}-\hat{A}-\hat{B}=180^{o}-7^{o}-133^{o}=40^{o}$

Finalmente, se calcula h, aplicando el teorema del seno:

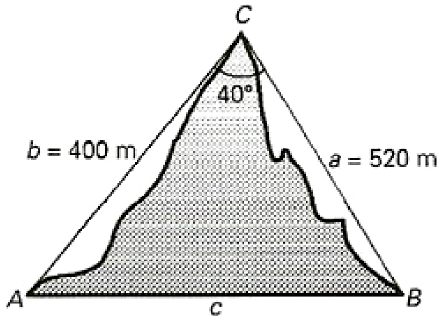
$$\frac{c}{sen\,\hat{C}}=\frac{h}{sen\,\hat{A}} \quad \Rightarrow \quad h=\frac{c\cdot sen\,\hat{A}}{sen\,\hat{C}}=\frac{175{,}95\cdot sen\ 7^{o}}{sen\,40^{o}}=33{,}36\ m$$

También se puede hacer aplicando el método de la doble observación:

$$tg\ 43^{o}=\frac{120}{x} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{120}{tg\ 43^{o}}$$

$$tg\ 50^{o}=\frac{120+h}{x} \quad \Rightarrow \quad h=x\cdot tg\ 50^{o}-120=\frac{120}{tg\ 43^{o}}\cdot tg\ 50^{o}-120=33{,}36\,m$$

5.- Hallar la distancia c = AB

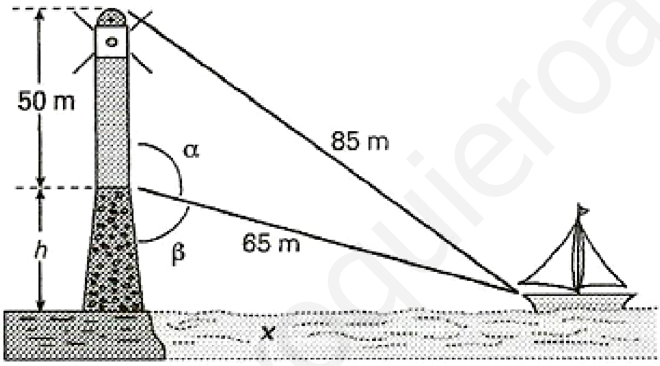


Aplicando el teorema del coseno

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}} = \sqrt{520^2 + 400^2 - 2 \cdot 520 \cdot 400 \cdot \cos 40^{\circ}} = 334{,}28\, m$$

6.- Hallar la altura h del promontorio.



Se calcula α (aplicando el teorema del coseno)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C} \quad \Rightarrow \quad \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} = \frac{50^2 + 65^2 - 85^2}{2 \cdot 50 \cdot 65} = -0{,}076923 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 94^{\circ}\, 24'\, 42''$$

Se calcula $\beta = 180^{\circ} - \alpha$

$$\beta = 180^{\circ} - 94^{\circ}\, 24'\, 42'' = 85^{\circ}\, 35'18''$$

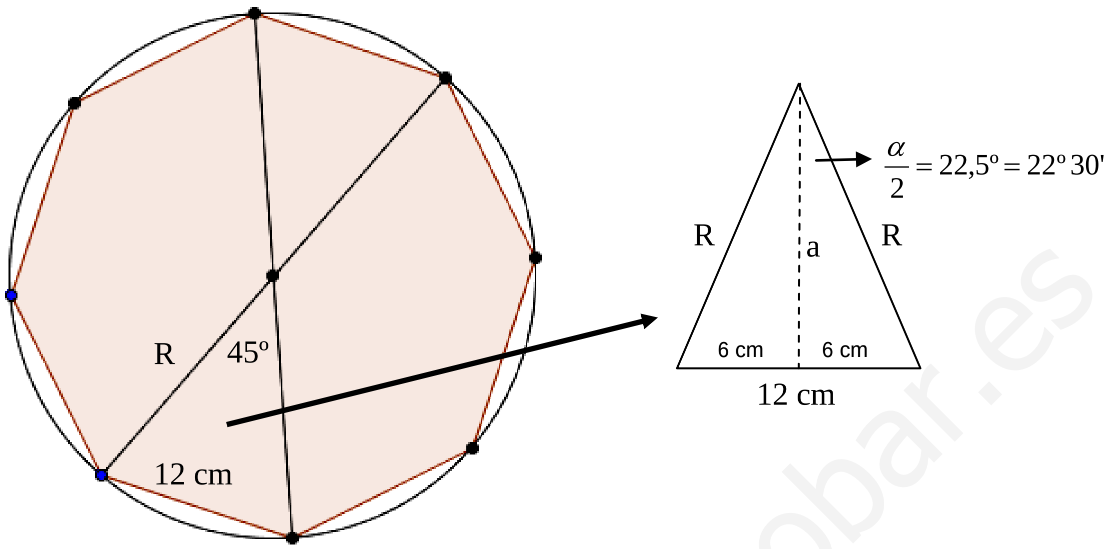
Se calcula $h = 65 \cdot \cos \beta$

$$h = 65 \cdot \cos 85^{\circ}\, 35'18'' \approx 5\, m$$

7.- Sabiendo que la longitud del lado de un octógono regular es 12 cm. Determina:

a) El radio de la circunferencia circunscrita.

b) El área del octógono.



Se halla el ángulo central: $\alpha = \dfrac{360^\circ}{n}$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = 22{,}5^\circ = 22^\circ\,30'$$

Calculamos R:

$$sen\frac{\alpha}{2} = \frac{6}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{6}{sen\,22^\circ\,30'} = 15{,}68\,cm$$

Para hallar el área necesitamos calcular previamente la apotema:

$$tg\,22^\circ\,30' = \frac{6}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{6}{tg\,22^\circ\,30'} = 14{,}49\,cm$$

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{8 \cdot 12 \cdot 14{,}49}{2} = 695{,}52\,cm^2$$

Nota: Se puede hacer de varias formas (explicar en clase)

¿Cómo se halla el ángulo interno en un polígono regular de n lados?

$$\beta = \frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n}$$