Binomio de Newton

El **factorial** de un número natural n se define como

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

$$0! = 1$$

Por ejemplo,

$$1! = 1 \qquad 2! = 2\cdot 1 = 2 \qquad 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$$

$$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24 \quad 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120 \quad 6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$$

Observad que se cumple que $n! = n\cdot(n-1)! \quad n\in\mathbb{N}$

BINOMIO DE NEWTON

Los números combinatorios se definen como

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

siendo n un número natural y $0 \le m \le n$

El número combinatorio $C_{n,m}$ representa el número de grupos distintos de m elementos que se pueden formar a partir de n objetos, de forma que cada grupo se diferencie de otro en algún elemento (combinaciones de n elementos tomados de m en m).

Por ejemplo, el número de grupos que se pueden formar con cuatro elementos tomados de dos en dos de forma que cada grupo se diferencie de otro en algún elemento son 6

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Si los elementos los denotamos por a, b, c y d los grupos son:

ab, ac, ad, bc, bd, cd

Para practicar con los números combinatorios puedes demostrar las siguientes propiedades:

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Binomio de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a\,b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

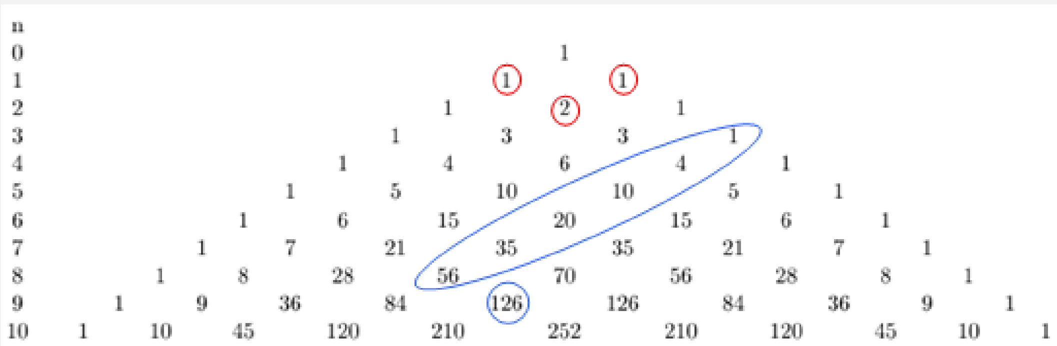
Para practicar con el binomio de Newton puedes contestar a los siguientes apartados:

(a) Desarrolla el binomio $(3x-4y)^5$

(b) Obtén el coeficiente de x^3 en el desarrollo de $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$

(c) Obtén el coeficiente de x^3 en el desarrollo de $\left(x^2+\frac{x}{2}\right)^{20}$

El triángulo de Pascal. Para la construcción del triángulo de Pascal se colocan en los bordes unos y cada número es la suma de los dos números que tiene inmediatamente encima.



Los números del triángulo de Pascal coinciden con los números combinatorios, así, en nuestra construcción, *n* representa la fila del elemento y *m* su lugar dentro de ella (contando como 0 la primera posición).

Si se considera el triángulo de Pascal se puede demostrar que

(a) La suma de los números de la fila n-ésima es 2^n

(b) La suma de todos los números anteriores a la fila n-ésima es $2^n - 1$

(c) La suma de todos los números en cualquier diagonal descendiente de derecha a izquierda es el número al sureste del último número incluido en la diagonal.