ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Son aquellas en las que la incógnita, x, aparece en el argumento de una razón trigonométrica:

Deberemos transformar la ecuación problema en una ecuación equivalente que tenga la forma:
$\operatorname{sen}x = a \quad , \cos x = b, \quad \operatorname{tg}x = c$

<u>Observaciones:</u>
Las soluciones de todas ecuaciones trigonométricas son infinitas

- $\operatorname{sen}x = a, \quad x = \operatorname{arcsen}a + 360n,\ n \in \mathbb{Z}$
- La calculadora sólo da una solución, por lo que deberemos tener en cuenta que
  $\operatorname{sen}x = \operatorname{sen}(180^{o} - x)$
  $\cos x = \cos(360^{o} - x)$
  $\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}(180^{o} + x)$

- Se puede trabajar en grados sexagesimales (mode DEG en la calculadora) o en radianes (mode RAD). Recuerda que $360^{o} = 2\pi \text{ rad}$

CASO I.

1º. $2\operatorname{sen}x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^{o} + 360^{o} \cdot n \\ x_2 = 180^{o} - 30^{o} + 360^{o} \cdot n,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2º $3\cos x = -2 \Leftrightarrow \cos x = \frac{-2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 131{,}81^{o} + 360^{o} \cdot n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 360^{o} - 131{,}81^{o} + 360^{o} \cdot n,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

3º $-4\operatorname{tg}x = 7 \Leftrightarrow \operatorname{tg}x = \frac{-7}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -60{,}26^{o} + 360^{o} \cdot n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180^{o} + (-60{,}26^{o}) + 180^{o} + 360^{o} \cdot n,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

La calculadora nos da como solución -60,26º que es igual a 360º+(-60,26º)=299,74º.

CASO II.

En el argumento de la razón trigonométrica aparece una expresión del tipo (ax+b), siendo a y b números reales.

4º

$$\operatorname{sen}(x+135^\circ)=-0,65\Rightarrow\begin{cases}x_1+135^\circ=-40,54^\circ+360^\circ\cdot n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x_2+135^\circ=180^\circ-(-40,54^\circ)+360^\circ\cdot n,\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-175,54^\circ+360^\circ\cdot n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x_2=355,54^\circ+360^\circ\cdot n,\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

5º

$$\cos(3x-35^\circ)=0,34\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1-35^\circ=70,12^\circ+360^\circ\cdot n,\ n\in\mathbb{Z}\\ 3x_2-35^\circ=360^\circ-70,12^\circ+360^\circ\cdot n,\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{35^\circ+70,12^\circ+360^\circ\cdot n}{3},\ n\in\mathbb{Z}\\ x_2=\dfrac{35^\circ+360^\circ-70,12^\circ+360^\circ\cdot n}{3},\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=35,04^\circ+120^\circ\cdot m,\ m\in\mathbb{Z}\\ x_2=108,29^\circ+120^\circ\cdot m,\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

6º

$$\operatorname{tg}(60^\circ-2x)=-5\Rightarrow\begin{cases}60^\circ-2x_1=-78,69^\circ+360^\circ\cdot n,\ n\in\mathbb{Z}\\ 60^\circ-2x_2=180+(-78,69^\circ)+360^\circ\cdot n,\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x_1=-138,69^\circ+360^\circ\cdot n,\ n\in\mathbb{Z}\\ -2x_2=41,31^\circ+360^\circ\cdot n,\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=69,35^\circ+180^\circ\cdot m,\ m\in\mathbb{Z}\\ x_2=-20,67^\circ+180^\circ\cdot m,\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Observa que $\dfrac{360n}{-2}=180m,\quad n,m\in\mathbb{Z}$, pues al recorrer n los enteros los dos conjuntos recorren los mismos valores

Observación. Las soluciones en el intervalo [0º, 360º] de cada una de las ecuaciones serían:

1º 30º y 150º
2º 131,81º y 228,19º
3º 229,74º y 119,74º
4º 184,46º y 355,54º
5º 35,04º, 35,04º+120º, 35,04º+240º,108,29º, 108,29º+120º y 108,29º+240º.
6º 69,35º, 69,35º+180º, 339,33º y 339,33º+180º.

Otro tipo de ecuaciones trigonométricas es aquel en el que aparecen 2 ó más razones trigonométricas distintas, entonces deberemos transformar la ecuación problema en otra equivalente que tenga sólo un tipo de razón trigonométrica y para ello disponemos de dos identidades:

$$\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 = 1 \text{ y } \mathrm{tg}x = \frac{\mathrm{sen}x}{\cos x}$$

$$7^{\text{o}}\ \mathrm{sen}x + \cos^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \mathrm{sen}x + \left[1 - \mathrm{sen}^2 x\right] = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}x - \frac{2}{3} = 0$$

Y esta última es una ecuación de 2º grado de incógnita senx.

$$\mathrm{sen}x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{8}{3}}}{2} = \begin{cases} \mathrm{sen}x_1 \approx 1,46 \\ \mathrm{sen}x_2 \approx -0,46 \end{cases}$$

La 1º solución no tiene sentido pues senx>1 y la 2ª se reduce al caso I.