1º Determina **m** para que el ángulo entre las rectas **r: –mx + y – 10 = 0** y **s: x + 2y – 3 = 0** sea de 60º. Hazlo de dos formas: 1. el producto escalar y 2. La tangente del ángulo que forman.

2º Calcula m para que el vector $\vec{u} = (1/3, m)$ sea unitario.

3º Determina la posición relativa de las rectas **r: –x + my – 3 = 0** y **s: mx – y + 2 = 0** según los valores de **m**. Calcula la distancia de r a s en cada caso.

4º Calcula el área del triángulo de vértices A = (2,1), B = (6,2) y C = (3,5).

5º Calcula **k** para que la distancia entre las rectas **r: –3x + 2y = 0** y **s: –3x + 2y + k = 0** sea 2.

6º Averigua cuál es el valor de **m** para que los puntos A = (1,0), B = (4,–1) y C = (m,2) estén alineados.

7º Por el punto A = (1,6) trazamos la perpendicular a la recta **r: 2x + y – 2 = 0**. Halla un punto de esa perpendicular que equidiste de A y de r.

8º Encuentra las coordenadas de los puntos situados en la recta **r: x + 2y − 3 = 0** que distan 2 unidades de la recta **s: 4x − 3y + 9 = 0**.

9º Halla la ecuación de la mediatriz de AB, siendo A = (3,1) y B = (5,2)

10º Dado el triángulo de vértices A = (1,3), B = (−2,5) y C = (0,−3). Calcula:

a) las ecuaciones de sus alturas y ortocentro,

b) las ecuaciones de sus medianas y baricentro,

c) las ecuaciones de sus mediatrices y circuncentro,

11º De todas las rectas que pasan por el punto P = (2,1), halla las que distan 1 unidad del origen.

12º Halla las coordenadas del punto simétrico de A = (−2,4) respecto de la recta **r: 2x + 3y = 0**.

13º Encuentra el baricentro y el ortocentro del triángulo de vértices A = (0,0), B = (4,0) y C = (6,8).

14º Halla el punto simétrico de P = (–3,0) respecto de la recta **r: 4x + y – 2 = 0**.

15º El punto A = (4,–3) dista 5 unidades de dos puntos de la recta **r: 7x−y−6=0**, calcula las coordenadas de los dos puntos.

16º Halla las coordenadas del punto simétrico del origen respecto de la recta **2x − 3y = 6**. Halla la distancia de dicho punto respecto de la recta.

17º Dado el vector $\vec{u} = (a, -3)$ y $\vec{w} = (-2, 1)$. Calcula:

a) el valor de **a** para que sea perpendicular a $\vec{v} = (2, 5)$,

b) el valor de **a** para que $\vec{v} = (2, 5)$ tenga módulo 5.

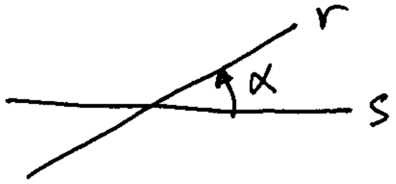
c) Un vector unitario a $\vec{w}$,

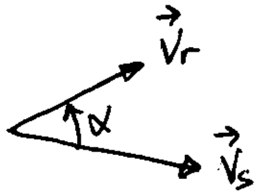
d) el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$ si **a** es 3. Exprésalo en radianes y grados

1º Método 1. El producto escalar

PRELIMINARES

El ángulo entre 2 rectas es el ángulo de sus vectores directores.





$\alpha = \text{áng}(r, s)$ $\qquad\qquad$ $\alpha = \text{áng}(\vec{v}_r, \vec{v}_s)$.

$$\boxed{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = |\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s| \cdot \cos\alpha}$$

$r: -mx + y - 10 = 0$

$\vec{n}_r = (-m, 1) \longrightarrow \vec{v}_r = (1, m)$

$s: x + 2y - 3 = 0$

$\vec{n}_s = (1, 2) \longrightarrow \vec{v}_s = (2, -1)$.

Impongamos la condición para determinar m:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = |\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s| \cdot \cos 60^\circ.$$

Cálculos:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (1, m) \cdot (2, -1) = 2 - m \\ |\vec{v}_r| = \sqrt{1+m^2} \quad \vec{v}_s = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{2 - m = \sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{1}{2}} \iff \boxed{4 - 2m = \sqrt{5 + 5m^2}}$$

Ecuación irracional.

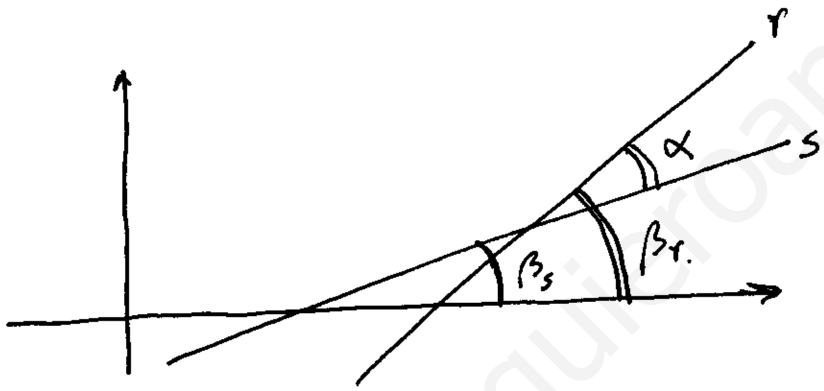
$(4-2m)^2 = \left(\sqrt{5+5m^2}\right)^2 \Leftrightarrow 16-16m+4m^2 = 5+5m^2 \Leftrightarrow$

$\boxed{m^2+16m-11=0}$

$m = \dfrac{-16 \pm \sqrt{16^2-4\cdot 1\cdot(-11)}}{2} = \dfrac{-16\pm\sqrt{300}}{2} = -8\pm\sqrt{75}$

Extrayendo factores de $\sqrt{75} = \sqrt{25\cdot 3} = 5\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{m = -8\pm 5\sqrt{3}}$

Método 2. La tangente.



$\alpha = \beta_r - \beta_s$

β_r = ángulo que forma r con el eje de abcisas $\Rightarrow tg\,\beta_r = m_r$

β_s = " " s " $\Rightarrow tg\,\beta_s = m_s$.

Recuerda $tg(B-A) = \dfrac{tg B - tg A}{1+tg B\cdot tg A}$

$\Rightarrow tg\,\alpha = tg(\beta_r-\beta_s) = \dfrac{tg\beta_r - tg\beta_s}{1+tg\beta_r\cdot tg\beta_s} \Leftrightarrow \boxed{tg\alpha = \dfrac{m_r - m_s}{1+m_r\cdot m_s}}$

$\left.\begin{array}{l} r: -mx+y-10=0 \rightarrow \vec{v}_r = (1,m) \longrightarrow m_r = \frac{m}{1} = m \\ s: x+2y-3=0 \longrightarrow \vec{v}_s = (2,-1) \longrightarrow m_s = \frac{-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$

M

Departamento de Matemáticas

$$\text{tg}\,60^\circ = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \iff \sqrt{3} = \frac{m - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + m \cdot \frac{-1}{2}} \iff \boxed{\sqrt{3} \cdot \left(1 - \frac{m}{2}\right) = m + \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} m = m + \frac{1}{2} \Rightarrow m \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$m = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{2\sqrt{3} - 1}{2}}{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{3}} \quad \text{(racionalizando)}$$

$$\boxed{m = \frac{2\sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} - 6 - 2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = \frac{-8 + 5\sqrt{3}}{-1} = +8 - 5\sqrt{3}}$$

Otra opción sería

$$\text{tg}\,60^\circ = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \rightarrow \cdots \boxed{m = -8 + 5\sqrt{3}}.$$

OBSERVACIONES

con la tangente la ecuación sería $\text{tg}\,60^\circ = \dfrac{|m_r - m_s|}{1 + m_r \cdot m_s}$

con el coseno la ecuación sería $|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s| = |\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s| \cdot \cos 60^\circ$.

donde $|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|$ indica el VALOR ABSOLUTO.

2º Un vector unitario es aquel vector de módulo 1.

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{3}, m\right)$$

Condición: $|\vec{u}| = 1 \iff \boxed{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + m^2} = 1}$

$$\sqrt{\frac{1}{9} + m^2} = 1 \iff \frac{1}{9} + m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

3º PRELIMINARES.

Para estudiar la posición relativa de 2 rectas conviene expresarlas en forma general.

$r: Ax+By+C=0$

$s: A'x+B'y+C'=0$

$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \rightarrow$ SECANTES $\longrightarrow dis(r,s)=0$

$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \rightarrow$ PARALELAS

$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \rightarrow$ COINCIDENTES $\longrightarrow dis(r,s)=0$

Para el caso de rectas paralelas su distancia se puede calcular de 2 formas.

- Fórmula.

$$\begin{matrix} r: Ax+By+C=0 \\ s: Ax+By+C'=0 \end{matrix} \rightarrow dis(r,s) = \frac{|C-C'|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Hay que tener la precaución de expresar r y s con los mismos valores de A y B.

- Aplicando la fórmula de un punto a una recta.

$$dis(r,s) = dis(P_r, s) = dis(P_s, r)$$

es la distancia de CUALQUIER punto de r a s ó la distancia de CUALQUIER punto de s a r.

Resolución:

$$\frac{-1}{m} = \frac{m}{-1} \Longleftrightarrow m^2 = 1 \rightarrow m = \pm 1.$$

- si $m \neq \pm 1 \rightarrow$ rectas secantes $\Rightarrow dis(r,s) = 0$.

- si $m = 1$.

$$\frac{-1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{-3}{2} \rightarrow \text{rectas paralelas.}$$

FÓRMULA

$$\left.\begin{aligned} r &: -x + y - 3 = 0 \\ s &: x - y + 2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{¿misma } A \text{ y } B?$$

$$\left.\begin{aligned} r &: x - y + 3 = 0 \\ s &: x - y + 2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow dis(r,s) = \frac{|3-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Buscamos un punto de r: $x = 0 \rightarrow y = 3 \Rightarrow P = (0,3)$

$$dis(r,s) = dis(P,s) = \frac{|0-3+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- si $m = -1$.

$$\frac{-1}{-1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-3}{2} \rightarrow \text{rectas paralelas.}$$

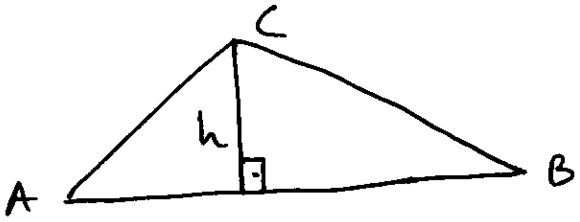
FÓRMULA.

$$\left.\begin{aligned} r &: -x - y - 3 = 0 \\ s &: -x - y + 2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow dis(r,s) = \frac{|-3-2|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

4º

PRELIMINARES.

El área de un triángulo es $\dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$.



base $|AB| = b$

altura $h = dis(C, r_{AB})$

$$\boxed{S = \frac{b \cdot h}{2}}$$

La altura del lado AB es la distancia del vértice C a la recta que pasa por A y B.

Paso 1

$b = |AB|$

$AB = B - A = (6,2) - (2,1) = (4,1)$ $\Big\}$ $|AB| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$.

Paso 2.

Recta que pasa por A y B. Se conoce 1 punto (A) y un vector (AB)

$$r \begin{cases} A = (2,1) \\ AB = (4,1) \end{cases}$$

En forma continua: $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{1}$. La expresamos en forma general pues hemos de calcular una distancia.

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{1} \iff x - 2 = 4(y-1) \iff \boxed{x - 4y + 2 = 0}$$

Paso 3.

$$h = dis(C, r) = \frac{|3 - 4 \cdot 5 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{\sqrt{17}}.$$

Paso 4

$$\boxed{S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} \cdot \frac{15}{\sqrt{17}} = \frac{15}{2}\, u^2}$$

5º PRELIMINARES

Si $r: Ax+By+C=0$ y $s: Ax+By+C'=0$, son 2 rectas paralelas.

$$dis(r,s) = \frac{|C-C'|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

En nuestro caso:

$r: -3x+2y=0$

$s: -3x+2y+k=0$

Condición: $dis(r,s)=2 \Leftrightarrow$

$$\frac{|k-0|}{\sqrt{(-3)^2+2^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|k|}{\sqrt{13}} = 2 \Rightarrow$$

$$|k| = 2\sqrt{13} \Rightarrow \boxed{k = \pm 2\cdot\sqrt{13}}$$

6º PRELIMINARES.

Tres puntos están alineados si están en la misma recta.

PROCEDIMIENTO.

Paso 1.

Se calcula la recta que pasa por $A=(1,0)$ y $B=(4,-1)$.

- vector director: $\vec{v}=AB=B-A=(4,-1)-(1,0)=(3,-1)$
- forma continua:

$$r=\begin{cases}\vec{v}\\ A\end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{3}=\frac{y}{-1}$$

la expresaremos en forma general $-x+1=3y \Rightarrow \boxed{x+3y-1=0}$

Paso 2

$C\in r \Rightarrow C$ cumple su ecuación

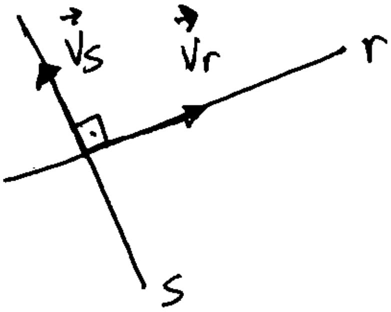
$C=(m,2)\in r: x+3y-1=0 \Rightarrow \boxed{m+3\cdot 2-1=0}$

$\Rightarrow \boxed{m=-5}$

Departamento de Matemáticas

7º Si r y s son rectas perpendiculares se cumple que

$\vec{v}_r = \vec{n}_s \iff \vec{v}_s = \vec{n}_r$



$$\boxed{\begin{array}{l} r: Ax + By + C = 0 \\ \vec{n}_r = (A, B) \end{array}}$$

Resolución del problema.

a) Sea s la recta solución. Necesitamos averiguar

a) un vector director

$s \perp r \rightarrow \vec{v}_s = \vec{n}_r = (2,1)$ $\qquad r: 2x + y - 2 = 0$

b) un punto: $A = (1,6)$

En forma continua

$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-6}{1} \iff x - 1 = 2y - 12 \iff \boxed{s: x - 2y + 11 = 0}$$

b) $P = (a, b)$

Condiciones

$P \in s \Rightarrow a - 2b + 11 = 0.$

$$dis(A, P) = dis(P, r) \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b-6)^2} = \frac{|2a + b - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

Sistema.

$$\left.\begin{array}{l} a - 2b + 11 = 0 \\ \sqrt{(a-1)^2 + (b-6)^2} = \dfrac{|2a+b-2|}{\sqrt{5}} \end{array}\right\}$$

M

Departamento de Matemáticas

Vamos a trabajar la 2ª ecuación. Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$(a-1)^2+(b-6)^2=\frac{(2a+b-2)^2}{5} \Leftrightarrow$$

$$5a^2-10a+5+5b^2-60b+180=4a^2+b^2+4+4ab-8a-4b.$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} a^2+4b^2-2a-56b-4ab+181=0 \\ a-2b+11=0 \end{array}\right\} a=2b-11$$

$$(2b-11)^2+4b^2-2(2b-11)-56b-4\cdot(2b-11)\cdot b+181=0.$$

$$4b^2-44b+121+4b^2-4b+22-56b-8b^2+44b+181=0$$

$$-60b+346=0 \rightarrow \boxed{b=\frac{346}{66}=\frac{173}{33}}$$

$$\Rightarrow a=2\cdot\frac{173}{33}-11=\frac{-17}{33}$$

$$\Rightarrow \boxed{P=\left(\frac{-17}{33},\frac{173}{33}\right)}$$

8º Sea P el punto pedido, en coordenadas $P=(a,b)$

Condiciones:

- $P\in r \to P$ cumple la ecuación de r. $\Rightarrow \boxed{a+2b-3=0}$
- $dist(P,s)=2 \Rightarrow \dfrac{|4a-3b+9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2 \Leftrightarrow$

$$\frac{|4a-3b+9|}{5}=2 \Leftrightarrow \boxed{|4a-3b+9|=10. \Leftrightarrow 4a-3b+9=\pm 10}$$

Tendremos 2 sistemas (debido al VALOR ABSOLUTO)

Signo (+)

$$\left.\begin{array}{l} a+2b-3=0 \\ 4a-3b+9=+10 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l} a+2b=3 \\ 4a-3b=1 \end{array}\right\}} \quad a=3-2b$$

$$4\cdot(3-2b)-3b=1 \Leftrightarrow 12-8b-3b=1 \to -11b=-11 \Rightarrow \boxed{b=1}$$

$$\Rightarrow a=3-2\cdot 1=1 \to \text{Solución: } \boxed{P=(1,1)}$$

Signo (−)

$$\left.\begin{array}{l} a+2b-3=0 \\ 4a-3b+9=-10 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} a+2b=3 \\ 4a-3b=-19 \end{array}\right\} \quad a=3-2b$$

$$4\cdot(3-2b)-3b=-19 \Leftrightarrow 12-8b-3b=-19 \Rightarrow -11b=-31 \Rightarrow \boxed{b=\frac{31}{11}}$$

$$\Rightarrow a=3-2\cdot\frac{31}{11}=\frac{-29}{11} \to \text{Solución: } \boxed{P'=\left(-\frac{29}{11},\frac{31}{11}\right)}$$

M

Departamento de Matemáticas

9º La mediatriz es la recta perpendicular a la recta que contiene a A y B y pasa por su punto medio.

Sea m el nombre de dicha recta.

$$m \begin{cases} \text{vector } \vec{v} \perp AB \\ M = \dfrac{A+B}{2} \end{cases}.$$

Cálculos:

- $AB = B - A = (5,2) - (3,1) = (2,1)$

  un vector perpendicular a AB sería $\vec{v} = (-1,2)$.

- $M = \dfrac{A+B}{2} = \dfrac{(3,1)+(5,2)}{2} = \left(4, \dfrac{3}{2}\right)$

La recta m en forma continua sería:

$$\boxed{m: \dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y-3/2}{2}}$$

Operando para expresarla en forma general:

$$2(x-4) = -1\cdot(y-3/2) \iff 2x-8 = -y+\frac{3}{2} \iff$$

$$2x+y-8-\frac{3}{2} = 0 \iff 2x+y-\frac{19}{2} = 0 \quad (\cdot 2) \Rightarrow$$

$$\boxed{m: \; 4x+2y-19=0}$$

OTRO MÉTODO.

$m: Ax+By+C=0$

(A,B) es un vector normal a m $\Rightarrow (2,1) \perp m$

$m: \; 2x+y+C=0.$

$M \in m \rightarrow M$ cumple su expresión:

$$M=\left(4,\frac{3}{2}\right) \in 2x+y+C=0 \Rightarrow 2\cdot 4+\frac{3}{2}+C=0 \rightarrow C=-\frac{19}{2}$$

$$\Rightarrow 2x+y-\frac{19}{2}=0 \Leftrightarrow \boxed{4x+2y-19=0}$$

OTRO MÉTODO MÁS:

La mediatriz de AB es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de A y de B.

$P=(x,y)$

$P \in$ mediatriz $\Rightarrow dis(A,P)=dis(B,P) \Leftrightarrow |AP|=|BP|$

En coordenadas

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2} \quad \text{(elevando al cuadrado)}$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2=(x-5)^2+(y-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2-6x+9+y^2-2y+1=x^2-10x+25+y^2-4y+4 \Leftrightarrow$$

$$-6x+9-2y+1+10x-25+4y-4=0 \Leftrightarrow$$

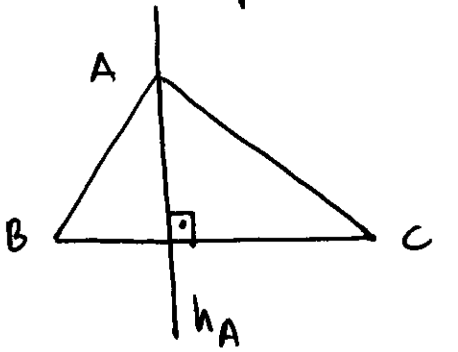
$$\boxed{4x+2y-19=0}$$

Departamento de Matemáticas

10º

a) Altura: recta perpendicular a un lado que pasa por el vértice opuesto.

Ortocentro: punto de corte de las alturas.



notación: $h_A \equiv$ altura del vértice A ó del lado BC.

$P \equiv$ ortocentro de $\widehat{ABC}$.

•) $h_A = \begin{cases} \text{punto } A = (1,3) \\ \perp BC = C - B = (0,-3) - (-2,5) = (2,-8) \equiv (1,-4) \end{cases}$

en forma general

$1 \cdot x + (-4) y + C' = 0$.

$A \in h_A \rightarrow 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 3 + C' = 0 \rightarrow C' = 11$ $\Big\}$ $\boxed{h_A : x - 4y + 11 = 0}$

•) $h_B = \begin{cases} \text{punto } B = (-2,5) \\ \perp AC = C - A = (0,-3) - (1,3) = (-1,-6) \equiv (1,6) \end{cases}$

en forma general

$1 \cdot x + 6 \cdot y + C' = 0$

$B \in h_B \longrightarrow 1 \cdot (-2) + 6 \cdot 5 + C' = 0 \rightarrow C' = -28$ $\Big\}$ $\boxed{h_B : x + 6y - 28 = 0}$

•) $h_C = \begin{cases} \text{punto } C = (0,-3) \\ \perp AB = B - A = (-2,5) - (1,3) = (-3,2) \end{cases}$

en forma general

$-3x + 2y + C' = 0$

$C \in h_C : -3 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) + C' = 0 \rightarrow C' = 6$ $\Big\}$ $\boxed{h_C : -3x + 2y + 6 = 0}$

ORTOCENTRO: punto de corte de las alturas.

$P = h_A \cap h_B$

$$\left.\begin{aligned} x-4y+11&=0 \\ x+6y-28&=0 \end{aligned}\right\} \quad x = 4y-11$$

$$4y-11+6y-28=0 \iff 10y = 39 \longrightarrow y = \frac{39}{10} \Rightarrow x = 4\cdot\frac{39}{10}-11 = \frac{23}{5}$$

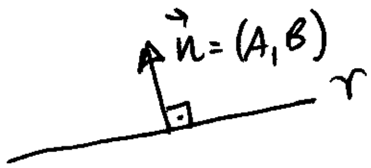
$$\Rightarrow \boxed{P = \left(\frac{23}{5}, \frac{39}{10}\right)}$$

¿$P \in h_C$? ¿$-3\cdot\frac{23}{5}+2\cdot\frac{39}{10}+6=0$?

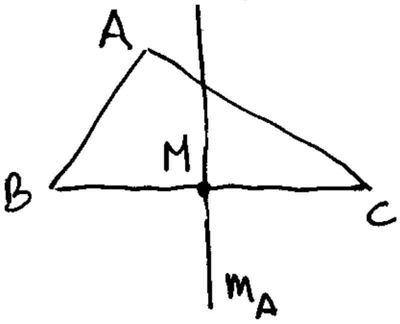
$$-\frac{69}{5}+\frac{78}{10}+6 = \frac{-69}{5}+\frac{39}{5}+6 = -\frac{30}{5}+6 = 0.$$

Recuerda: en una recta en forma general $r: Ax+By+C=0$

(A,B) es un vector NORMAL a r.



c) Mediatriz: recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.



$$M = \frac{B+C}{2}$$

$$m_A = \begin{cases} \text{punto } M \\ \text{perpendicular a } BC. \end{cases}$$

Circuncentro: punto de corte de las mediatrices.

$$P = \text{circuncentro de } \widehat{ABC}.$$

•) $m_A = \begin{cases} M \\ \perp BC \end{cases}$ $\quad M = \frac{B+C}{2} = \frac{(-2,5)+(0,-3)}{2} = (-1,1)$

$$BC = C - B = (2,-8) \equiv (1,-4).$$

en forma general

$$1 \cdot x + (-4) \cdot y + C = 0$$

$$M \in m_A \longrightarrow 1\cdot(-1) + (-4)\cdot 1 + C = 0 \rightarrow C = 5 \Big\} \boxed{m_A : x - 4y + 5 = 0}$$

•) m_B es una recta paralela a la altura del lado AC y pasa por el punto medio de A y C.

$$m_B \doteq \begin{cases} N = \frac{A+C}{2} = \frac{(1,3)+(0,-3)}{2} = (1/2, 0) \\ \parallel h_B \rightarrow x + 6y + C = 0 \end{cases}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) \in x + 6y + C = 0 \rightarrow \tfrac{1}{2} + C = 0 \rightarrow C = -\tfrac{1}{2} \Big\} \boxed{m_B : x + 6y - \tfrac{1}{2} = 0}$$

OBSERVACIÓN:

No confundir el coeficiente C en la forma general con el punto G del triángulo.

Departamento de Matemáticas

$\cdot)\ m_c = \begin{cases} R = \frac{A+B}{2} = \frac{(1,3)+(-2,5)}{2} = \left(-\frac{1}{2}, 4\right) \\ \perp AB = (-3,2) \end{cases}$

en forma general:

$-3x + 2y + C = 0.$

$R \in -3x + 2y + C = 0 \rightarrow -3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\cdot 4 + C = 0 \rightarrow C = \frac{-19}{2}$

$\Rightarrow \boxed{m_c : -3x + 2y - \frac{19}{2} = 0}$

CIRCUNCENTRO: $P = m_A \cap m_B$, y comprobaremos que es de m_c.

$\left.\begin{matrix} x - 4y + 5 = 0 \\ x + 6y - 1/2 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{r} x - 4y + 5 = 0 \\ -x - 6y + 1/2 = 0 \\ \hline -10y + 11/2 = 0 \end{array} \rightarrow \boxed{y = \frac{11}{20}}$

$x = 4y - 5 = 4\cdot\frac{11}{20} - 5 = -\frac{14}{5} \Rightarrow \boxed{P = \left(-\frac{14}{5}, \frac{11}{20}\right)}$

¿$P \in m_c$? $-3\cdot\frac{-14}{5} + 2\cdot\frac{11}{20} - \frac{19}{2} = \frac{42}{5} + \frac{22}{20} - \frac{19}{2} = 0.$ SI

P es el centro de la circunferencia circunscrita $\Rightarrow |PA| = |PB| = |PC|$

$|PA| = \sqrt{\left(1+\frac{14}{5}\right)^2 + \left(3 - \frac{11}{20}\right)^2} = \sqrt{\frac{361}{25} + \frac{2401}{400}} = \sqrt{\frac{8177}{400}}$

$|PB| = \sqrt{\left(-2+\frac{14}{5}\right)^2 + \left(5 - \frac{11}{20}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{7921}{400}} = \sqrt{\frac{8177}{400}}.$

$|PC| = \sqrt{\left(0+\frac{14}{5}\right)^2 + \left(-3 - \frac{11}{20}\right)^2} = \sqrt{\frac{196}{25} + \frac{5401}{400}} = \sqrt{\frac{8177}{400}}$

Departamento de Matemáticas

11º Sea r la recta solución. Será una recta del haz de rectas que pasan por $P = (2,1)$: en forma punto-pendiente.

$$r:\ y - 1 = m\cdot(x-2)$$

Deberemos determinar m.

Condición: $\text{dist}(r, O) = 1$ siendo $O = (0,0)$

Para poder aplicar la fórmula deberemos expresar r en forma general.

$$y - 1 = mx - 2m \Rightarrow \boxed{mx - y + 1 - 2m = 0}$$

Impongamos la condición: (*)

$$\frac{|m\cdot 0 - 0 + 1 - 2m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1 \iff \frac{|1-2m|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \iff$$

$$\boxed{|1-2m| = \sqrt{m^2+1}}$$

Como aparece el valor absoluto tendremos 2 ecuaciones:

signo (+)

$$\sqrt{m^2+1} = +(1-2m).$$

(*) Recuerda $\text{dis}(P, r) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

siendo $r:\ Ax + By + C = 0$ y $P = (x_0, y_0)$

$$\left(\sqrt{m^2+1}\right)^2 = (1-2m)^2 \iff m^2+1 = 1-4m+4m^2 \iff$$

$$\boxed{3m^2-4m=0} \Rightarrow m=0 \text{ y } m' = \frac{4}{3}.$$

$$m(3m-4)=0$$

signo $\ominus$ $\quad \sqrt{m^2+1} = -(1-2m)$

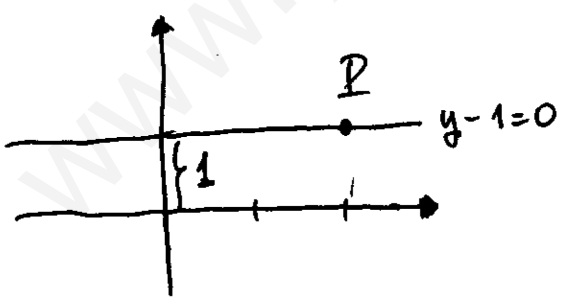
Al elevar al cuadrado se obtiene la misma ecuación que la correspondiente al signo $\oplus$.

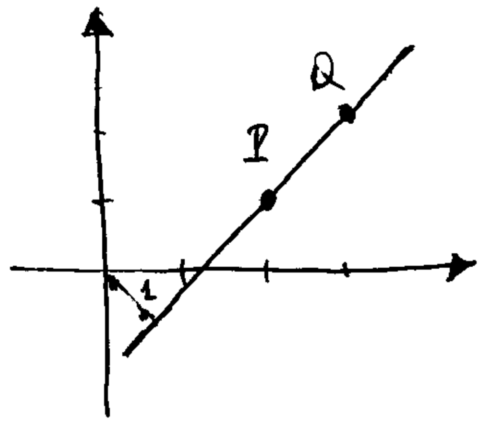
SOLUCIÓN:

$m=0 \rightarrow \boxed{y-1=0}$

$m=\frac{4}{3} \rightarrow \boxed{y-1=\frac{4}{3}(x-2)}$

Un dibujo.





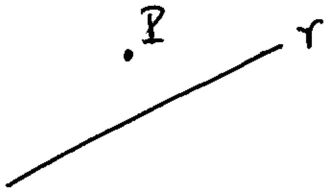
$m=0: \; y-1=0$ $\qquad$ $m=\frac{4}{3}: \; y-1=\frac{4}{3}(x-2)$

si $x=3 \rightarrow y=\frac{7}{3}$ $\quad Q=\left(3,\frac{7}{3}\right)$

Departamento de Matemáticas

12º Punto simétrico respecto de una recta.

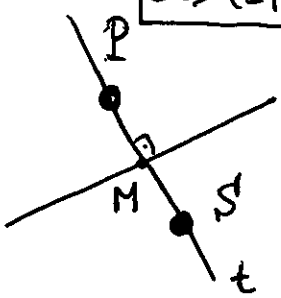
Sea P el punto y r la recta



El punto simétrico de P respecto de r o el simétrico de P es S

¿Qué condición cumple S?

$$\boxed{dis(P,r) = dis(S,r)}$$



$$M = \frac{P+S}{2}$$

Argumento

- M es el punto medio del segmento de extremos P y S.
- si se averigua $M \Rightarrow$ se conoce S.
- ¿cómo se obtiene M?

  M es un punto de la recta r. y es un punto de t

$\Rightarrow M = r \cap t$.

- ¿como se obtiene t?

la recta t es

perpendicular a $r \Rightarrow \vec{v}_t = \vec{n}_r$

pasa por el punto P.

$$\boxed{\text{Paso 1: ¿}t\text{?} \quad \text{Paso 2: ¿}M\text{?} \quad \text{Paso 3: ¿}S\text{?}}$$

Paso 1:

$$t:\begin{cases} P=(-2,4) \\ \vec{v}_t=\vec{n}_r \end{cases} \Rightarrow \boxed{t:\begin{cases} P=(-2,4) \\ \vec{v}_t=(2,3) \end{cases}}$$

$$r: 2x+3y=0 \rightarrow \vec{n}_r=(2,3)$$

En forma continua:

$$t: \frac{x+2}{2}=\frac{y-4}{3}$$

la expresamos en forma general

$$3\cdot(x+2)=2\cdot(y-4) \Leftrightarrow 3x+6=2y-8 \Leftrightarrow \boxed{3x-2y+14=0}$$

Paso 2

$M=r\cap t$.

M es la solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y=0 \\ 3x-2y+14=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (+3) \\ (-2) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} 6x+9y=0 \\ -6x+4y-28=0 \\ \hline 13y-28=0 \rightarrow y=\frac{28}{13}. \end{array}$$

$$2x+3\cdot\frac{28}{13}=0 \rightarrow x=-\frac{42}{13} \Rightarrow \boxed{M=\left(-\frac{42}{13},\frac{28}{13}\right)}$$

Paso 3:

$$M=\frac{P+S}{2} \leftrightarrow 2M=P+S \Rightarrow S=2M-P.$$

$$S=2\cdot\left(-\frac{42}{13},\frac{28}{13}\right)-(-2,4) \Rightarrow \boxed{S=\left(-\frac{56}{13},\frac{4}{13}\right)}$$