

1° Demuestra que si \vec{u} y \vec{v} son vectores de igual módulo entonces $(\vec{u} + \vec{v})$ es perpendicular a $(\vec{u} - \vec{v})$.

2° Dado el vector $\vec{u} = (32, -24)$, calcula otro vector que sea ortogonal a él y tenga de módulo 3 unidades.

3° Calcula las bisectrices de las rectas $r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -4 + \lambda \end{cases}$ y $s: \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$.

4° Halla el punto simétrico de $P = (-3, 0)$ respecto de la recta $r: 4x + y - 2 = 0$.

5° Halla la distancia entre las rectas r y s según los valores de m . Siendo $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3}$ y $s: 6x - my + 1 = 0$.

6° Un punto equidista de los puntos $A = (7, 1)$ y $B = (1, 3)$. La distancia de éste punto al eje de ordenadas es el doble que la distancia al eje de abscisas. Calcula el punto.

7° Halla el valor de m para que la recta de ecuación $r: 4x + my - 24 = 0$ determine con los ejes de coordenadas un triángulo de área 24 unidades cuadradas.

8° En el paralelogramo de vértices ABCD se conocen las coordenadas de los puntos $A = (1, 4)$, $B = (2, 1)$ y $C = (7, 2)$. Calcula el vértice D, la longitud de sus diagonales y el ángulo que forman.

9° Encuentra el baricentro y el ortocentro del triángulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$ y $C = (6, 8)$.

Sean \vec{u} y \vec{v} tales que $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

Recuerda: si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ (si $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$)

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v}.$$

observaciones: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{u}|^2$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2.$$

$$\Rightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0 \Rightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v}).$$

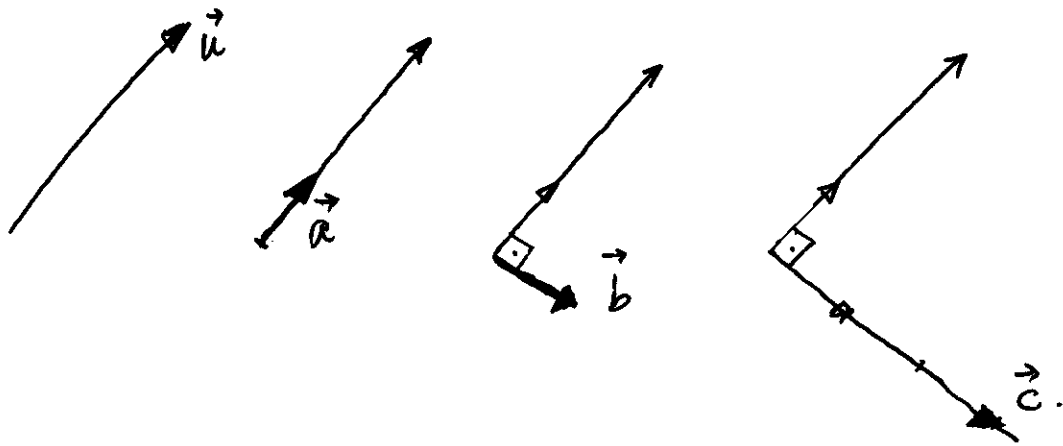
• Método 1: por construcción.

1) vector unitario de \vec{u} : \vec{a}

2) vector ortogonal a \vec{a} : \vec{b} .

3) vector de módulo 3 y proporcional a \vec{b} : $\boxed{\vec{c}}$ SOLUCIÓN

De modo gráfico.



$$\textcircled{1} \quad \vec{a} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}, \quad |\vec{u}| = \sqrt{32^2 + (-24)^2} = \sqrt{1600} = 40. \Rightarrow$$

$$\vec{a} = \frac{(32, -24)}{40} = \left(\frac{32}{40}, \frac{-24}{40} \right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5} \right)$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{b} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{c} = 3\vec{b} = 3 \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) = \boxed{\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5} \right)}$$

Otra solución sería $-\vec{c} = \left(\frac{-9}{5}, \frac{-12}{5} \right)$

Método 2: mediante un sistema.

Sea \vec{v} el vector pedido: $\vec{v} = (x, y)$

$$\begin{aligned} \text{.) } \vec{u} \perp \vec{v} &\rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (32, -24) \cdot (x, y) = 0 \Rightarrow \\ &32x - 24y = 0 \iff \boxed{4x - 3y = 0} \end{aligned}$$

$$\text{.) } |\vec{v}| = 3 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \iff \boxed{x^2 + y^2 = 9}$$

El problema se reduce a resolver el sistema

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \rightarrow x = \frac{3y}{4} \rightarrow \left(\frac{3y}{4}\right)^2 + y^2 = 9 \rightarrow$$

$$\frac{9y^2}{16} + y^2 = 9 \iff 9y^2 + 16y^2 = 144 \rightarrow 25y^2 = 144$$

$$\rightarrow y^2 = \frac{144}{25} \rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{144}{25}} = \pm \frac{12}{5}$$

$$\text{si } y = \frac{12}{5} \rightarrow x = \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{5} = \frac{9}{5} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)}$$

$$\text{si } y = -\frac{12}{5} \rightarrow x = \frac{3}{4} \cdot -\frac{12}{5} = -\frac{9}{5} \Rightarrow \boxed{\vec{v}' = \left(-\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}\right)}$$

La bisectriz es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de 2 rectas dadas.

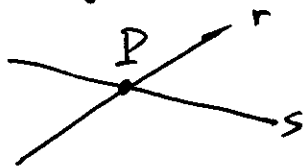
① se expresan r y s de forma general

$$r: \frac{x-3}{-2} = \frac{y+4}{1} \Leftrightarrow x-3 = -2y-8 \Leftrightarrow \boxed{x+2y+5=0}$$

$$s: \frac{5x+3y}{15} = 1 \Leftrightarrow 5x+3y=15 \Leftrightarrow \boxed{5x+3y-15=0}$$

$\vec{v}_r = (-2, 1)$ y $\vec{v}_s = (-3, 5)$: no son proporcionales, por lo tanto r y s se cortan en un punto.

② dibujo y condición:



$P \in$ bisectriz de r y s si $\text{dis}(P, r) = \text{dis}(P, s)$

Si $P = (x, y) \Rightarrow$

$$\frac{|x+2y+5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|5x+3y-15|}{\sqrt{5^2+3^2}} \Leftrightarrow \frac{|x+2y+5|}{\sqrt{5}} = \frac{|5x+3y-15|}{\sqrt{34}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{34} |x+2y+5| = \sqrt{5} |5x+3y-15| \Rightarrow$$

$$\boxed{\sqrt{34} \cdot (x+2y+5) = \pm \sqrt{5} \cdot (5x+3y-15)}$$

Agrupando todos los valores en el 1er miembro obtendríamos 2 soluciones.

signo \oplus

$$(\sqrt{34} - 5\sqrt{5})x + (2\sqrt{34} - 3\sqrt{5})y + 5\sqrt{34} + 15\sqrt{5} = 0$$

signo \ominus

$$(\sqrt{34} + 5\sqrt{5})x + (2\sqrt{34} + 3\sqrt{5})y + 5\sqrt{34} - 15\sqrt{5} = 0$$

redondeando a la 1^a cifra decimal:

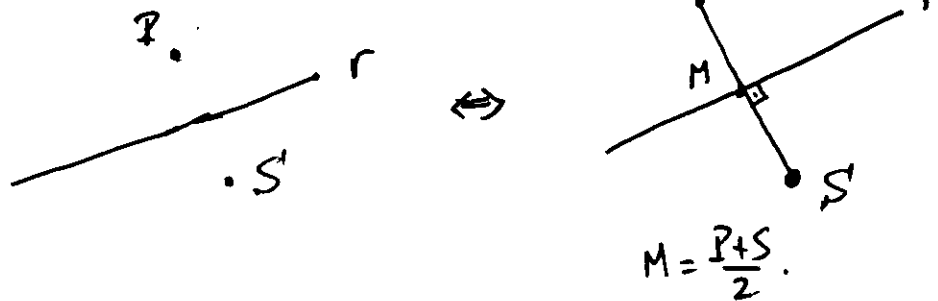
$$\oplus \quad 12,9x + 5y + 62,7 = 0$$

$$\ominus \quad -9,4x + 18,4y - 4,4 = 0$$

S' es el simétrico de P respecto de r .

¿Qué condición cumple?

$$\text{dis}(P, r) = \text{dis}(S', r)$$



La idea para la obtención de S' se basa en hallar M , que es el punto medio de P y S' .

M es la intersección de dos rectas: r y s .

1) r es la recta dada.

2) s es una recta perpendicular a r y que pasa por P .

¿ s ? $s: \begin{cases} \perp r \rightarrow x - 4y + c = 0. \\ P \rightarrow -3 - 4 \cdot 0 + c = 0 \rightarrow c = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$$s: x - 4y + 3 = 0$$

M es la solución del sistema de r y s

$$\begin{cases} 4x + y - 2 = 0 \\ x - 4y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y - 2 = 0 \\ -4x + 16y - 12 = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{17y - 14 = 0}{17y - 14 = 0} \rightarrow y = \frac{14}{17} \rightarrow$$

$$x = 4y - 3 = 4 \cdot \frac{14}{17} - 3 = \frac{5}{17} \Rightarrow M = \left(\frac{5}{17}, \frac{14}{17} \right)$$

¿ S' ? $M = \frac{P+S'}{2} \Leftrightarrow 2M = P+S' \Rightarrow S' = 2M - P$

$$S' = 2 \cdot \left(\frac{5}{17}, \frac{14}{17} \right) - (-3, 0) = \left(\frac{61}{17}, \frac{28}{17} \right)$$

Primero: vamos a expresar ambas rectas en forma general

$$r: 3(x+1) = 2(y-2) \Leftrightarrow 3x+3 = 2y-4 \Leftrightarrow \boxed{3x-2y+7=0}$$

Segundo: veamos las posiciones relativas

$$\begin{cases} 3x-2y+7=0 \\ 6x-my+1=0 \end{cases} \quad \text{c} \quad \frac{3}{6} = \frac{-2}{-m} = \frac{7}{1} ?$$

Observando la condición:

$$\frac{3}{6} = \frac{-2}{-m} \Leftrightarrow 3m = +12 \rightarrow \boxed{m = +4}$$

$$\text{si } m = +4 \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{7}{1} \quad \text{rectas paralelas.}$$

$$\text{si } m \neq +4 \rightarrow \frac{3}{6} \neq \frac{-2}{-m} \neq \frac{7}{1} \quad \text{rectas secantes.}$$

Caso:

• si $m = +4$ rectas paralelas $\Rightarrow \text{dis}(s, r) = \text{dis}(P, r)$ siendo P un punto cualquiera de s .

$$s: 6x-4y+1=0, \text{ si } x=0 \rightarrow y = \frac{1}{4} \Rightarrow P = (0, \frac{1}{4})$$

$$\Rightarrow \text{dis}(P, r) = \frac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{4} + 7|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|-\frac{1}{2} + 7|}{\sqrt{13}} = \frac{\frac{13}{2}}{\sqrt{13}} = \frac{13}{2\sqrt{13}}$$

racionalizando:

$$\boxed{\text{dis}(r, s) = \frac{13}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{2}}$$

• si $m \neq +4$ rectas secantes $\rightarrow \boxed{\text{dis}(r, s) = 0}$

Si las rectas son paralelas podemos aplicar la fórmula:

$$r: Ax + By + C = 0$$

$$s: Ax + By + C' = 0$$

$$\rightarrow \text{dis}(r,s) = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Observa que los coeficientes de x e y en r y s son idénticos.

En nuestro caso:

$$r: 3x - 2y + 7 = 0$$

$$s: 6x - 4y + 1 = 0.$$

Hay 2 opciones: $r \cdot 2$ ó $s : 2$.

$$r: 2 \cdot (3x - 2y + 7 = 0) \rightarrow \boxed{r: 6x - 4y + 14 = 0}$$

$$\boxed{s: 6x - 4y + 1 = 0} \Rightarrow$$

$$\text{dis}(r,s) = \frac{|14 - 1|}{\sqrt{6^2 + (-4)^2}} = \frac{13}{\sqrt{52}} = \frac{13 \cdot \sqrt{52}}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{52}} = \frac{13 \cdot \sqrt{52}}{52} = \frac{13 \cdot 2 \cdot \sqrt{13}}{52} = \boxed{\frac{\sqrt{13}}{2}}$$

$$\sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2 \cdot \sqrt{13}$$

Sea $P = (x, y)$

• 1ª condición: equidista de A y B $\Leftrightarrow |AP| = |BP|$.

• 2ª condición: $\text{dis}(P, r) = 2 \cdot \text{dis}(P, s)$

r: eje de ordenadas: $x = 0$.

s: eje de abscisas: $y = 0$.

Recuerde:

$$\text{si } r: Ax + By + C = 0 \text{ y } P = (x_0, y_0) \Rightarrow \text{dis}(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

1ª condición:

$$|AP| = |BP| \Leftrightarrow \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{x^2 - 14x + 49}_{\text{}} + \underbrace{y^2 - 2y + 1}_{\text{}} = \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{\text{}} + \underbrace{y^2 - 6y + 9}_{\text{}} \Leftrightarrow$$

$$-12x + 4y + 40 = 0 \Leftrightarrow \boxed{-3x + y + 10 = 0}$$

2ª condición:

$$\text{dis}(P, r) = \frac{|x|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x|$$

$$\Rightarrow |x| = 2|y| \Leftrightarrow x = \pm 2y$$

$$\text{dis}(P, s) = \frac{|y|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = |y|$$

Tendremos 2 sistemas:

signo \oplus

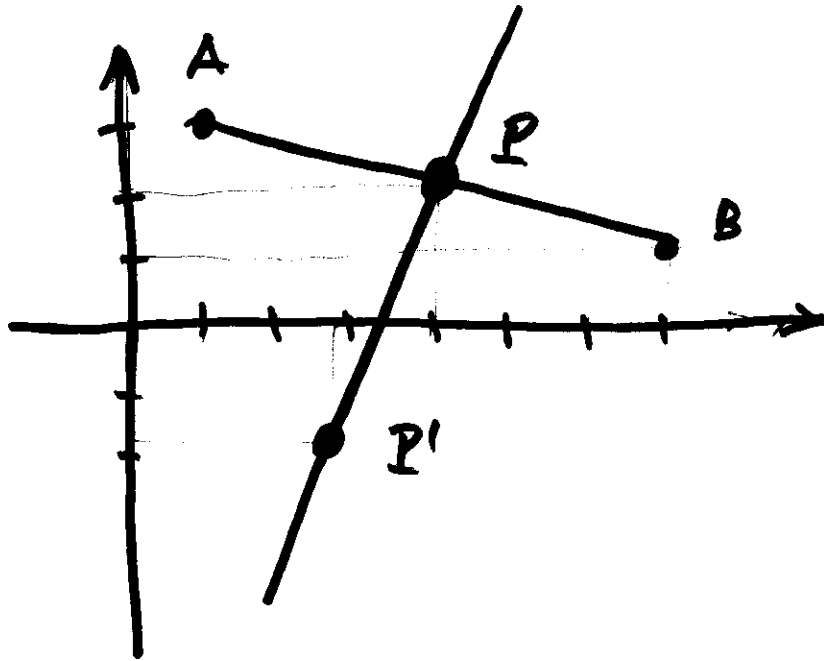
$$\begin{cases} -3x + y + 10 = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow -3 \cdot 2y + y + 10 = 0 \rightarrow -5y + 10 = 0 \Rightarrow y = 2$$

$$\rightarrow x = 2 \cdot 2 = 4$$

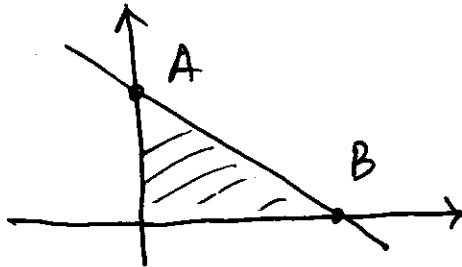
$$\Rightarrow \boxed{P = (2, 4)}$$

Signo \ominus

$$\begin{aligned} -3x + y + 10 = 0 \\ x = -2y \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} -3 \cdot (-2y) + y + 10 = 0 &\rightarrow 7y + 10 = 0 \rightarrow y = \frac{-10}{7} \\ \rightarrow x = -2 \cdot \frac{-10}{7} = \frac{20}{7} &\Rightarrow \boxed{P' = \left(\frac{20}{7}, \frac{-10}{7} \right)} \end{aligned} \right.$$



Los puntos de corte con los ejes determinan un triángulo rectángulo cuyos catetos son los segmentos sobre los ejes.



$$\text{¿A? } x=0 \rightarrow my-24=0 \rightarrow y=\frac{24}{m} \Rightarrow A=(0, \frac{24}{m})$$

$$\text{¿B? } y=0 \rightarrow 4x-24=0 \rightarrow x=\frac{24}{4}=6 \Rightarrow B=(6,0)$$

El área de un triángulo rectángulo es el producto de los catetos entre 2.

$$S = \frac{6 \cdot |\frac{24}{m}|}{2}$$

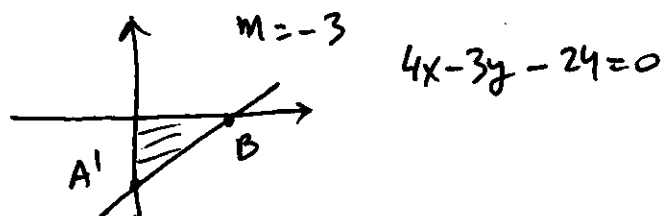
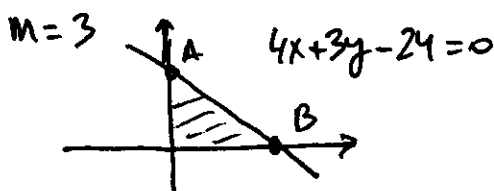
se pone valor absoluto porque A puede estar "detrás" del eje de abscisas.

Condición:

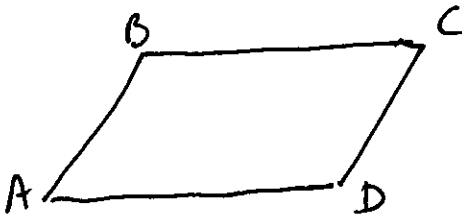
$$\frac{6 \cdot |\frac{24}{m}|}{2} = 24 \Leftrightarrow \frac{6 \cdot \pm \frac{24}{m}}{2} = 24$$

$$\text{signo } \oplus : \frac{6 \cdot \frac{24}{m}}{2} = 24 \Leftrightarrow \frac{144}{2m} = 24 \Rightarrow m = \frac{144}{2 \cdot 24} = 3$$

$$\text{signo } \ominus : \frac{6 \cdot \frac{-24}{m}}{2} = 24 \Leftrightarrow \frac{-144}{2m} = 24 \Rightarrow m = \frac{-144}{2 \cdot 24} = -3$$



Como ABCD es un paralelogramo



$$AB = DC \Leftrightarrow B - A = C - D \rightarrow$$

$$D = C - B + A$$

$$\boxed{D = (7, 2) - (2, 1) + (1, 4) = (6, 5)}$$

diagonales:

•) longitud

$$|AC| = |C - A| = \sqrt{(7-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40}.$$

$$|BD| = |D - B| = \sqrt{(6-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}.$$

El ángulo que forman las diagonales \Leftrightarrow ángulo que forman las rectas sobre las que se apoyan \Leftrightarrow ángulo de sus vectores directores.

$$AC = C - A = (6, -2)$$

$$BD = D - B = (4, 4)$$

El ángulo entre vectores se halla mediante el producto escalar.

$$AC \cdot BD = |AC| \cdot |BD| \cdot \cos \alpha \rightarrow$$

$$\cos \alpha = \frac{AC \cdot BD}{|AC| \cdot |BD|} = \frac{(6, -2) \cdot (4, 4)}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{32}} = \frac{16}{\sqrt{1280}} \rightarrow \boxed{\alpha \approx 63,4^\circ}$$

BARICENTRO

$$G = \frac{A+B+C}{3} = \frac{(0,0) + (4,0) + (6,8)}{3} = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

ORTOCENTRO.

Punto de corte de las alturas. La altura es la recta perpendicular a un lado que pasa por el vértice opuesto.

Notación:

$$h_A \equiv \left\{ \begin{array}{l} \perp BC \\ \text{pasa por } A. \end{array} \right.$$

Procedimiento:

- o) se obtendrán 2 alturas (de las 3 posibles) cualquiera.
- o) se calculará el punto de corte de ambas alturas.
- o) se calculará la 3ª altura y se comprobará que el punto obtenido en el paso 2 está en la recta. Dicho punto es el ORTOCENTRO.

$$h_A: \left\{ \begin{array}{l} \perp BC = C - B = (6,8) - (4,0) = (2,8) \equiv (1,4) \\ \rightarrow \text{su vector director sería: } \vec{v} = (4,-1). \\ A = (0,0) \end{array} \right.$$

En forma continua: $\frac{x-0}{4} = \frac{y-0}{-1} \Leftrightarrow -x = 4y \Rightarrow \boxed{x+4y=0}$

$$h_B: \left\{ \begin{array}{l} \perp AC = C - A = (6,8) - (0,0) = (6,8) \equiv (3,4) \\ B = (4,0) \rightarrow \text{su vector director sería } \vec{v} = (4,-3) \end{array} \right.$$

En forma continua

$$\frac{x-4}{4} = \frac{y-0}{-3} \Leftrightarrow -3(x-4) = 4y \Rightarrow -3x+12=4y$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-3x-4y+12=0}$$

Sistema

$$\begin{cases} x+4y=0 \\ -3x-4y+12=0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x=-4y \\ \leftarrow \end{array} \right.$$

$$-3 \cdot (-4y) - 4y + 12 = 0 \Leftrightarrow 12y - 4y + 12 = 0 \rightarrow y = \frac{-12}{8} = \frac{-3}{2}$$

$$x = -4 \cdot \frac{-3}{2} = 6$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Ortocentro} = \left(6, \frac{3}{2}\right)}$$

Comprobación:

$$h_c: \begin{cases} \perp AB = B-A = (4,0) - (0,0) = (4,0) \equiv (1,0) \\ C = (6,8) \rightarrow \vec{v} = (0,1) \end{cases}$$

$$\frac{x-6}{0} = \frac{y-1}{8} \Leftrightarrow 8 \cdot (x-6) = 0 \rightarrow \boxed{x-6=0}$$

$$\left(6, \frac{3}{2}\right) \in x-6=0. \text{ evidentemente.!!}$$