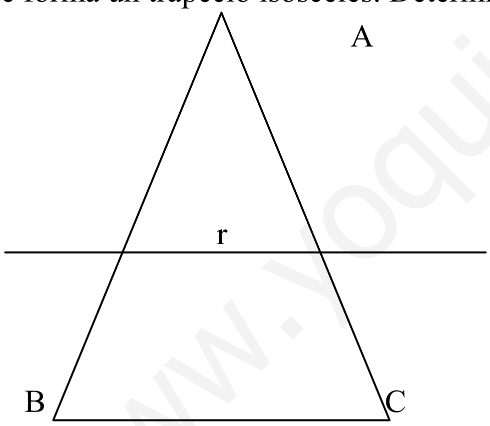
51575

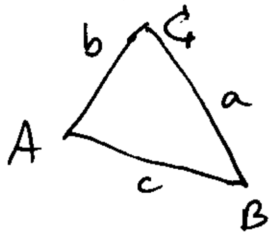
1º Demuestra que el triangulo de vértices es isósceles: A = (3, 1), B = (9, −1) y C = (5, −5). Calcula su área.
2º Determina si el triángulo A = (12, 10), B = (20, 16) y C = (8, 32) es rectángulo.
3º Halla los vértices de un cuadrado si dos de esos vértices no consecutivos son A = (3, 1) y B = (9,−7).
4º Dados los puntos A = (3,0) y B = (−3,0), obtén un punto C sobre el eje de ordenadas, de modo que el triángulo ABC que describan sea equilátero. ¿Hay solución única?
5º Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento A = (5, −1) y B = (17, 8) en tres partes iguales.
6º Las rectas que contienen a los lados de un triángulo son: r: x+y−5=0, s: 6x+5y−24=0 y t: 2x+y−8=0. Calcula sus vértices y su área.
7º Halla las bisectrices de las rectas: r: 3x−4y+2=0 y s: 5x+12y−7=0.
8º La recta que pasa por el punto P = (2,3) y es paralela a la recta $r: \frac{x-6}{4} = \frac{y+3}{-6}$ forma un triángulo con los ejes cartesianos. Determina su área
9º Los puntos A = (2, 2) y B = (−10, −2) son los vértices correspondientes al lado desigual de un triángulo isósceles. El otro vértice está sobre la recta $r: \left.\begin{matrix} x = 1-6\lambda \\ y = 1+2\lambda \end{matrix}\right\}$. Determínalo y halla el lado del triángulo.
10º Tenemos un triángulo de vértices A = (4, 9), B = (11, 10) y C = (9, 4). Comprueba que es un triángulo isósceles. Trazamos una paralela al lado desigual pasando por el punto P = (7, 6). Y se forma un trapecio isósceles. Determina su área.



11º Encuentra un punto del eje de abscisas que esté a la misma distancia que el punto A = (5, 4) que de la recta $r: \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{3}$.
12º De todas las rectas que pasan por el punto P = (2, 3) calcula la recta que determina segmentos iguales al cortar a los dos ejes cartesianos.

51575

Veamos cuánto miden sus lados



$b = |AC| \quad a = |BC| \quad c = |AB|$

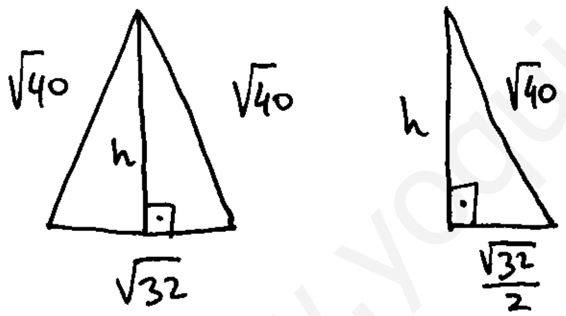
$$AC = C - A = (5,-5) - (3,1) = (2,-6) \Rightarrow |AC| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40}.$$

$$BC = C - B = (5,-5) - (9,-1) = (-4,-4) \Rightarrow |BC| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$$

$$AB = B - A = (9,-1) - (3,1) = (6,-2) \Rightarrow |AB| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40}$$

$\Rightarrow \quad b = c \neq a \quad$ ISÓSCELES

Área:



Teorema de Pitágoras.

$$h^2 + \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{40}\right)^2 \iff$$

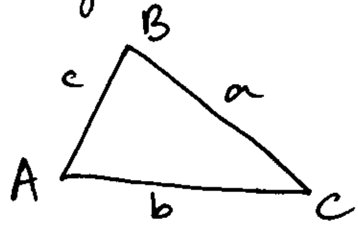
$$h^2 + \frac{32}{4} = 40 \Rightarrow h^2 = 32$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \sqrt{32}}$$

Área $\boxed{A = \frac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{32}}{2} = 16 \ u^2}$

Método 1.

Se calculan los lados y se comprueba si cumple el teorema de Pitágoras.



$a = |BC| \qquad b = |AC| \qquad c = |AB|$

$BC = C - B = (8,32) - (20,16) = (-12,16) \Rightarrow a = |BC| = \sqrt{(-12)^2 + 16^2}$

$a = \sqrt{400} = 20.$

$AC = C - A = (8,32) - (12,10) = (-4,22) \Rightarrow b = |AC| = \sqrt{(-4)^2 + 22^2}$

$b = \sqrt{500}$

$AB = B - A = (20,16) - (12,10) = (8,6) \Rightarrow c = |AB| = \sqrt{8^2 + 6^2} =$

$c = \sqrt{100} = 10$

De ser rectángulo la hipotenusa sería $b = \sqrt{500}$ (por ser el mayor)

¿ $b^2 = a^2 + c^2$? $\Leftrightarrow (\sqrt{500})^2 = (\sqrt{400})^2 + (\sqrt{100})^2$ ¡SI.

$\Rightarrow$ SI ES RECTÁNGULO.

Método 2.

Se calculan los ángulos mediante el producto escalar.

Recuerda: si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares $\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Para que sea rectángulo el triángulo UNO de los productos escalares de los vectores que representan sus lados debe ser NULO.

$$BC\cdot AC=(-12,16)\cdot(-4,22)=48+352=400\neq 0.$$

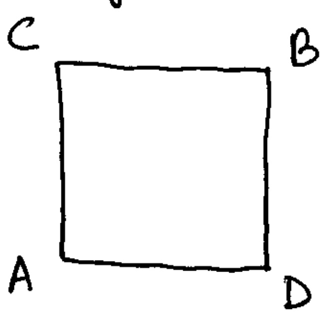
$$BC\cdot AB=(-12,16)\cdot(8,6)=-96+96=0 \Rightarrow BC\perp AB$$

y sí es un triángulo rectángulo.

¿Qué hay que saber?

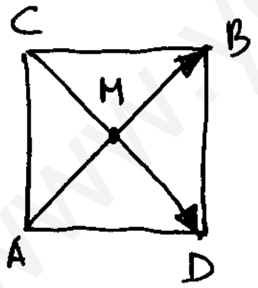
- las diagonales de un cuadrado se cortan en su punto medio y son perpendiculares.
- con dos puntos P y Q se construye el vector $PQ = Q - P$.
- dado el vector $\vec{v} = (a,b)$ se pueden construir 2 vectores perpendiculares a $\vec{v}$ y del mismo módulo que $\vec{v}$: $\vec{n} = (b,-a)$ y $\vec{n}' = (-b,a)$: $|\vec{v}| = |\vec{n}| = |\vec{n}'|$.

Un dibujo.



datos: A y B $A = (3,1)$, $B = (9,-7)$

objetivo: ¿C, D?



$MB \perp MC$ y $|MD| = |MC|$

$MB \perp MD$. y $|MB| = |MD|$.

¿M? $M = \frac{A+B}{2} = \frac{(3,1)+(9,-7)}{2} = (6,-3)$

$MB = B - M = (9,-7) - (6,-3) = (3,-4)$

¿$\vec{n} \perp MB$? $\vec{n} = (4,3) \Rightarrow \boxed{MC = \vec{n}} \Rightarrow C - M = \vec{n} \Rightarrow C = M + \vec{n}$

$\boxed{C = (6,-3) + (4,3) = (10,0)}$

¿$\vec{n}' \perp MB$? $\vec{n}' = (-4,-3) \Rightarrow \boxed{MD = \vec{n}'} \Rightarrow D - M = \vec{n}' \Rightarrow D = M + \vec{n}'$

$\boxed{D = (6,-3) + (-4,-3) = (2,-6)}$

51575

¿Qué hay que saber?

- El área de un triángulo equilátero es $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ siendo a su lado.

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

- C sobre el eje de ordenadas $C = (0, b)$, $b \in \mathbb{R}$.

Condiciones: $|CA| = |CB| = |AB|$. los 3 lados iguales.

$$CA = A - C = (3,0) - (0,b) = (3,-b) \rightarrow |CA| = \sqrt{9+b^2}$$

$$CB = B - C = (-3,0) - (0,b) = (-3,-b) \rightarrow |CB| = \sqrt{9+b^2}$$

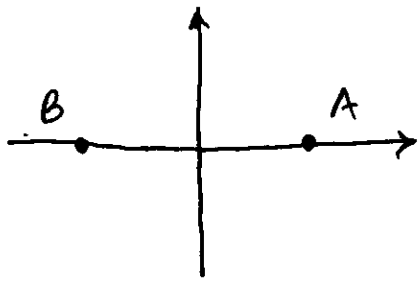
$$AB = B - A = (-3,0) - (3,0) = (-6,0) \rightarrow |AB| = 6.$$

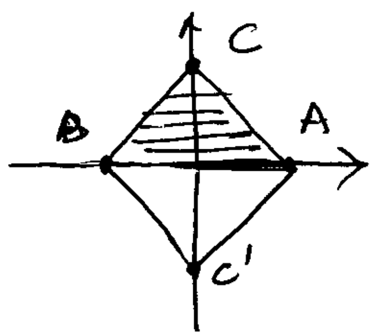
$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{9+b^2} = 6}$$

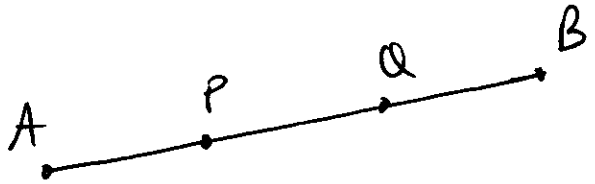
$$\Leftrightarrow 9 + b^2 = 6^2 \Leftrightarrow b^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow \boxed{b = \pm\sqrt{27}}$$

Dos soluciones:

$C = (0, \sqrt{27})$ $\quad C' = (0, -\sqrt{27})$







$A=(5,-1)$
$B=(17,8)$

datos: A, B.
objetivo: P y Q
condiciones: $AB = 3AP \rightarrow$ ¿P?
$AP = PQ \rightarrow$ ¿Q?

- $AB = 3AP \Leftrightarrow B - A = 3(P-A) = 3P - 3A \Leftrightarrow 3P = B + 2A$

$$\Rightarrow P = \frac{B+2A}{3} = \frac{(17,8)+2\cdot(5,-1)}{3} = \frac{(27,6)}{3} = (9,2)$$

$$\boxed{P = (9,2)}$$

- $AP = PQ \Leftrightarrow P - A = Q - P \Leftrightarrow Q = 2P - A$

$$\Rightarrow Q = 2(9,2) - (5,-1) = (18,4) - (5,-1) = (13,5)$$

$$\boxed{Q = (13,5)}$$

Vértices del triángulo.

Cada vértice es el punto de corte de 2 rectas.

$A = r \cap s$ (A es la intersección de r y s). $\Leftrightarrow$ solución del sistema

$$\left.\begin{array}{l} x+y-5=0 \\ 6x+5y-24=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{r} -6x-6y+30=0 \\ 6x+5y-24=0 \\ \hline -y+6=0 \end{array} \rightarrow y=6 \rightarrow x+6-5=0 \rightarrow x=-1$$

$$\boxed{A=(-1,6)}$$

$B = r \cap t$

$$\left.\begin{array}{l} x+y-5=0 \\ 2x+y-8=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} -x-y+5=0 \\ 2x+y-8=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} \\ \hline x-3=0 \end{array} \rightarrow x=3 \rightarrow 3+y-5=0 \rightarrow y=2$$

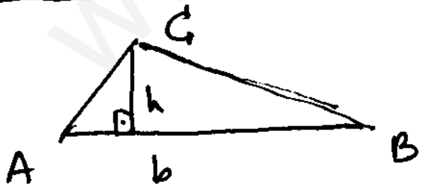
$$\boxed{B=(3,2)}$$

$C = s \cap t$

$$\left.\begin{array}{l} 6x+5y-24=0 \\ 2x+y-8=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{r} 6x+5y-24=0 \\ -6x-3y+24=0 \\ \hline 2y=0 \end{array} \rightarrow y=0 \rightarrow 6x+5\cdot 0-24=0 \rightarrow x=4$$

$$\boxed{C=(4,0)}$$

Área del triángulo.



$S = \frac{1}{2} b \cdot h$

$b = |AB|$

$h = dis(r_{AB}, C)$

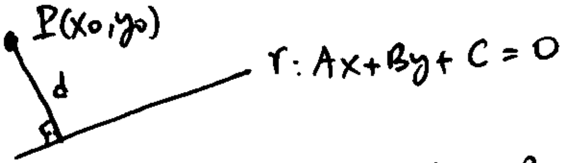
- la base "b" es el módulo del vector AB

$AB = B - A = (3,2) - (-1,6) = (4,-4)$

$|AB| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} \Rightarrow \boxed{b = \sqrt{32}}$

- La altura es la distancia de la recta que pasa por A y B al vértice opuesto: C. (*)

Recuerda la fórmula de la distancia de un punto a una recta



$$dis(P,r) = d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

$$r_{AB}\left\{\begin{array}{l}\vec{v} = AB = (4,-4) \longrightarrow \vec{n} = (4,4) \equiv (1,1) \quad (**)\\ A = (-1,6)\end{array}\right.$$

en forma general: $x+y+C=0$

¿C? $A \in r_{AB} \Rightarrow -1+6+C=0 \rightarrow C=-5$ $\Rightarrow \boxed{r_{AB} = \; x+y-5=0}$

$$\Rightarrow \boxed{h = dis(C, r_{AB}) = \frac{|4+0-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{2}\sqrt{32}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\ u^2}$$ $u \equiv$ unidades en las que se mida

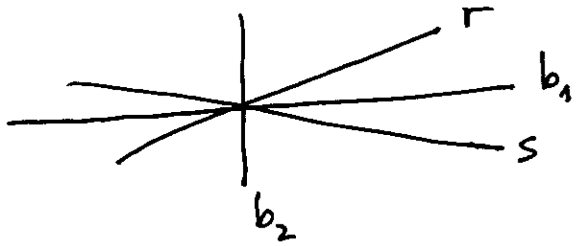
(*) valdría elegir otro lado y su correspondiente altura.

(**) el vector $\vec{n} = (4,4)$ ó cualquiera de sus múltiplos pues sólo interesa de él su dirección:

$$(4,4) = 4\cdot(1,1)$$

Método 1: mediante el concepto de distancia. Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos rectas dadas. Está formado por dos rectas perpendiculares.

Representación gráfica.



r y s son las rectas dadas

b_1 y b_2 son las bisectrices.

$$\left.\begin{array}{l} r: Ax+By+C=0 \\ s: A'x+B'y+C'=0 \end{array}\right\} \quad P \in \text{bisectriz si} \quad dis(r,P)=dis(s,P)$$

si P es (x,y) $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \dfrac{|A'x+B'y+C'|}{\sqrt{A'^2+B'^2}}}$

$$\left.\begin{array}{l} b_1: \dfrac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = + \dfrac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}} \\[2em] b_2: \dfrac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = - \dfrac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} r: 3x-4y+2=0 \\ s: 5x+12y-7=0 \end{array}\right\}$$

$$\frac{|3x-4y+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|5x+12y-7|}{\sqrt{5^2+12^2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{|3x-4y+2|}{5} = \frac{|5x+12y-7|}{13} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3x-4y+2}{5} = \frac{\pm(5x+12y-7)}{13} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3x-4y+2}{5} = \dfrac{+(5x+12y-7)}{13} \\ \\ \dfrac{3x-4y+2}{5} = \dfrac{-(5x+12y-7)}{13} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 13(3x-4y+2) = 5(5x+12y-7) \\ 13(3x-4y+2) = -5(5x+12y-7) \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} b_1: 14x-112y+61=0 \\ b_2: 64x+8y-9=0 \end{array}}$$

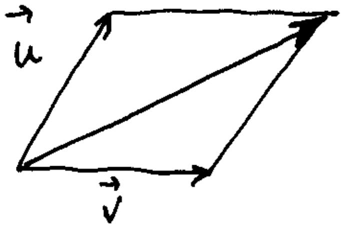
Observa que $b_1 \perp b_2$

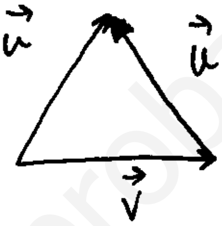
$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_1 = (14, -112) \\ \vec{n}_2 = (64, 8) \end{array}\right\} \quad \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 14 \cdot 64 + (-112) \cdot 8 = 896 - 896 = 0.$$

Método 2: mediante el cálculo de un punto y un vector director.

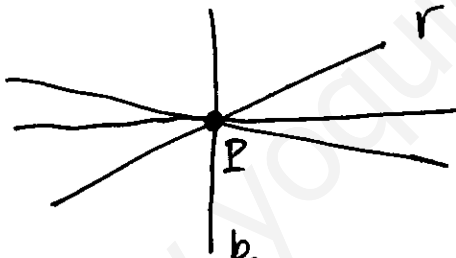
¿Qué hay que saber?

Dos vectores no alineados de IGUAL MÓDULO determinan un rombo (o un cuadrado si son ortogonales). Las diagonales son las bisectrices de los ángulos y son la suma y la diferencia de los vectores





Representación gráfica:



$b_1 \begin{cases} \text{punto } P \\ \text{vector director } \vec{u}_r + \vec{u}_s \end{cases}$

$b_2 \begin{cases} \text{punto } P \\ \text{vector director } \vec{u}_r - \vec{u}_s \end{cases}$

$\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$ serán vectores DIRECTORES UNITARIOS de r y s respectivamente.

$$\left.\begin{array}{l} r: 3x-4y+2=0 \\ s: 5x+12y-7=0 \end{array}\right\}$$

- P es el punto de corte r y s $\Leftrightarrow$ solución del sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 3x-4y+2=0 \;(\cdot 3) \\ 5x+12y-7=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 9x-12y+6=0 \\ 5x+12y-7=0 \end{array}\right\}$$
$$14x \quad -1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{14}.$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x-4y+2=0 \;(\cdot -5) \\ 5x+12y-7=0 \;(\cdot 3) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -15x+20y-10=0 \\ 15x+36y-21=0 \end{array}\right\}$$
$$+56y-31=0 \longrightarrow y=\frac{31}{56}$$

$$\Rightarrow \boxed{P=\left(\frac{1}{14}, \frac{31}{56}\right)}$$

- Vectores:

$$\vec{n}_r=(3,-4) \Rightarrow \vec{v}_r=(4,3) \Rightarrow \vec{u}_r=\frac{\vec{v}_r}{|\vec{v}_r|}=\frac{(4,3)}{\sqrt{4^2+3^2}}=\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$\vec{n}_s=(5,12) \Rightarrow \vec{v}_s=(12,-5) \Rightarrow \vec{u}_s=\frac{\vec{v}_s}{|\vec{v}_s|}=\frac{(12,-5)}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\left(\frac{12}{13}, \frac{-5}{13}\right)$$

$$b_1: \left\{\begin{array}{l} P \\ \vec{u}=\vec{u}_r+\vec{u}_s=\left(\frac{4}{5}+\frac{12}{13}, \frac{3}{5}-\frac{5}{13}\right)=\left(\frac{112}{65}, \frac{14}{65}\right) \equiv (112,14) \end{array}\right.$$ a

b

$$\Rightarrow 14x-112y+C=0.$$

¿C? P es de la recta $\Rightarrow 14\cdot\frac{1}{14}-112\cdot\frac{31}{56}+C=0 \Rightarrow C=61$

$$\Rightarrow \boxed{b_1: 14x-112y+61=0}$$

51575

$$b_2: \begin{cases} P \\ \vec{V} = \vec{u}_r - \vec{u}_s = \left(\frac{4}{5} - \frac{12}{13}, \frac{3}{5} + \frac{5}{13}\right) = \left(\frac{-8}{65}, \frac{64}{65}\right) \equiv (-8, 64) \text{ (a)} \end{cases}$$

$\Rightarrow 64x + 8y + C = 0.$ (b)

¿C? P es de la recta $\rightarrow 64 \cdot \frac{1}{14} + 8 \cdot \frac{31}{56} + C = 0 \rightarrow C = -9$

$\Rightarrow \boxed{b_2: \ 64x + 8y - 9 = 0}$

Observaciones:

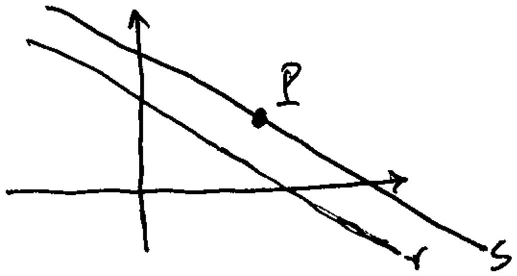
(a) En el vector director de una recta SÓLO interesa el dirección, da igual el módulo

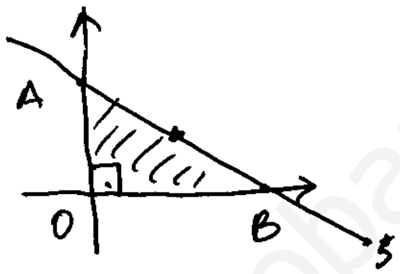
$\left(\frac{112}{65}, \frac{14}{65}\right)$ y $65 \cdot \left(\frac{112}{65}, \frac{14}{65}\right)$ ambos son válidos y es más sencillo el 2º.

(b) En una recta en forma general $Ax + By + C = 0$ (A, B) es vector normal y $(-B, A)$ ó $(B, -A)$ un vector director.

Deberemos determinar el área del triángulo $\widehat{OAB}$.

Es un triángulo rectángulo, las medidas de sus catetos se obtienen de las coordenadas de los puntos A y B, que son los puntos de corte de la recta s (paralela a r y que pasa por P) con los ejes de coordenadas.





¿s?

- $s \parallel r \Rightarrow \vec{v}_s = \vec{v}_r = (4,-6)$
- un punto de s es $P=(2,3)$

$\Rightarrow \boxed{s: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-3}{-6}}$

¿A,B?

si $x=0$ (en s) $\Rightarrow \dfrac{-2}{4} = \dfrac{y-3}{-6} \rightarrow y=6 \Rightarrow \boxed{A=(0,6)}$

si $y=0$ (en s) $\Rightarrow \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{-3}{-6} \rightarrow x=4 \Rightarrow \boxed{B=(4,0)}$

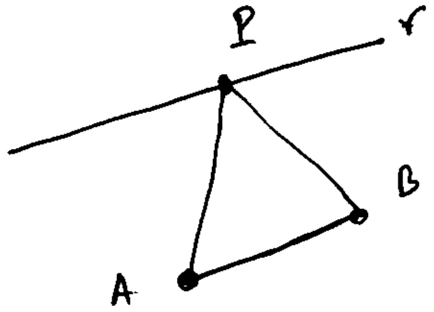
¿Área del triángulo $\widehat{OAB}$?

$S = \frac{1}{2}\,\text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2} 4 \cdot 6 = \boxed{12\ u^2}$ (*)

(*) u = unidades en que se midan las distancias.

51575

Un dibujo de la situación ayuda a comprender cuál es el argumento para resolver el problema.



AB = lado desigual.

Sea P la solución.

<u>Método 1</u>.

$|AP| = |BP|$ por ser isósceles.

¿P?

① $P \in r \Rightarrow$ cumple su ecuación $P = (1-6\lambda, 1+2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

② $|AP| = |BP|$

calculemos los vectores y los módulos.

$AP = P - A = (1-6\lambda, 1+2\lambda) - (2,2) = (-1-6\lambda, -1+2\lambda)$

$BP = P - B = (1-6\lambda, 1+2\lambda) - (-10,-2) = (11-6\lambda, 3+2\lambda)$

$|AP| = |BP| \Leftrightarrow \sqrt{(-1-6\lambda)^2 + (-1+2\lambda)^2} = \sqrt{(11-6\lambda)^2 + (3+2\lambda)^2} \Leftrightarrow$

$1 + 12\lambda + \cancel{36\lambda^2} + 1 - 4\lambda + \cancel{4\lambda^2} = 121 - 132\lambda + \cancel{36\lambda^2} + 9 + 12\lambda + \cancel{4\lambda^2}$

$\Rightarrow 128\lambda = 128 \rightarrow \lambda = 1$

$\Rightarrow \boxed{P = (1 - 6\cdot 1, 1 + 2\cdot 1) = (-5, 3)}$

Método 2.

$P=(x,y)$

Expresemos la recta r en forma general

$$r:\ \frac{x-1}{-6}=\frac{y-1}{2} \iff 2x-2=-6y+6 \Rightarrow \boxed{r:\ x+3y-4=0}$$

① $P\in r \Rightarrow$ cumple su ecuación.

② $|AP|=|BP| \iff \boxed{\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+10)^2+(y+2)^2}}$

Tenemos un sistema. Operando sobre la 2ª ecuación:

$$x^2-4x+4+y^2-4y+4=x^2+20x+100+y^2+4y+4 \iff$$

$$-24x-8y-96=0 \iff \boxed{3x+y+12=0}$$

Sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+3y-4=0 \\ 3x+y+12=0 \end{array}\right\}(\cdot-3) \iff \begin{array}{r} -3x-9y+12=0 \\ 3x+y+12=0 \\ \hline -8y+24=0 \end{array} \rightarrow y=3$$

$$\Rightarrow x+3\cdot3-4=0 \rightarrow x=-5 \qquad \boxed{P=(-5,3)}$$

Método 3.

Como $\overset{\triangle}{ABP}$ es isósceles de lado desigual AB, el punto P está en la mediatriz del segmento AB. ⇒ P es la intersección de 2 rectas: r y m = (mediatriz del segmento AB)

$$m\left\{\begin{array}{l} M=\frac{A+B}{2} \\ \vec{V} \text{ es un vector perpendicular a } AB \end{array}\right. \iff$$

51575

M es el punto medio de A y B

$$M = \frac{(2,2)+(-10,-2)}{2} = (-4,0)$$

$$AB \perp \vec{v} \Rightarrow AB = B-A = (-10,-2)-(2,2) = (-12,-4) \equiv (3,1)$$

$$\Rightarrow \vec{v} = (1,-3) \ (*)$$

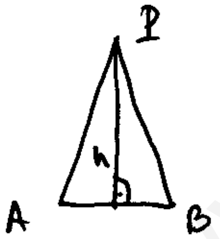
$\Rightarrow$ la recta m en forma continua: $\frac{x+4}{1} = \frac{y}{-3} \Leftrightarrow -3x-12 = y$

$$\Rightarrow \boxed{m: 3x+y+12=0}$$

P es la intersección de r y m $\Leftrightarrow$ solución del sistema

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y+12=0 \ (m) \\ x+3y-4=0 \ (r) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P=(-5,3)}$$

ÁREA DEL TRIÁNGULO $\widehat{ABP}$



$$S = \frac{|AB| \cdot h}{2}$$

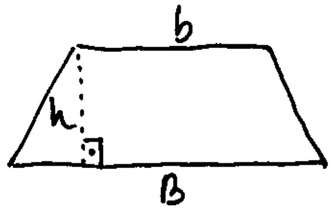
¿h? $h = dis(r_{AB}, P)$

$$¿r_{AB}? \left\{\begin{array}{l} A=(2,2) \\ \vec{v} = AB = (3,1) \end{array}\right. \Rightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{1} \Leftrightarrow \boxed{x-3y+4=0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow dis(r_{AB}, P) = \frac{|-5-3\cdot 3+4|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \frac{10\sqrt{10}}{10} = \sqrt{10} \\ |AB| = |(-12,-4)| = \sqrt{(-12)^2+(-4)^2} = \sqrt{160} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{S = \frac{\sqrt{160}\cdot\sqrt{10}}{2} = 40\,u^2}$$

(*) recuerda si $\vec{v} = (a,b)$ un vector perpendicular es $\vec{n} = (b,-a)$

Recuerda la fórmula del área de un trapecio.



$h =$ altura

$b =$ base menor

$B =$ base mayor

$S =$ área

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{(B+b)\cdot h}{2}}$$

- Veamos si es un triángulo isósceles.
  Para ello calculamos las longitudes de los lados.

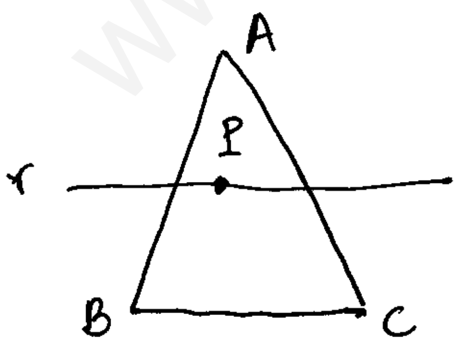
$$\left.\begin{array}{l} |AB| = c \\ \quad AB = B - A = (11,10) - (4,9) = (7,1) \end{array}\right\} \Rightarrow c = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50}.$$

$$\left.\begin{array}{l} |AC| = b \\ \quad AC = C - A = (9,4) - (4,9) = (5,-5) \end{array}\right\} \Rightarrow b = \sqrt{5^2+(-5)^2} = \sqrt{50}.$$

$$\left.\begin{array}{l} |BC| = a \\ \quad BC = C - B = (9,4) - (11,10) = (-2,-6) \end{array}\right\} \Rightarrow a = \sqrt{(-2)^2+(-6)^2} = \sqrt{40}$$

$$\boxed{b = c \neq a \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \text{ es isósceles}}$$

- Determinación de la recta r.



El lado desigual es BC.

$$r \left\{\begin{array}{l} \text{punto } P \\ \text{vector director } \vec{v} = BC \end{array}\right.$$

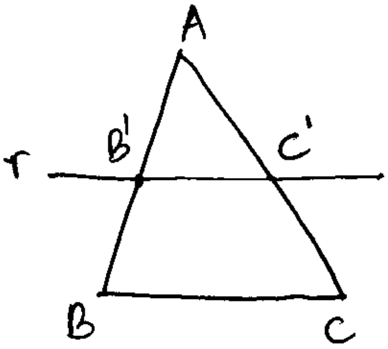
En forma continua

$$\boxed{r: \frac{x-7}{-2} = \frac{y-6}{-6}} \Leftrightarrow -6x + 42 = -2y + 12$$

$$\Leftrightarrow -6x + 2y + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-3x + y + 15 = 0}$$

- Determinación del área del trapecio



$$S = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

Base mayor $B = |BC|$

Base menor $b = |B'C'|$.

Altura $h = dis(r, B)$ (*)

¿B'? Es el punto de corte de la recta r con la recta que pasa por A y B (la llamaremos r_{AB})

$$r_{AB} \begin{cases} A = (4,9) \\ \vec{V} = AB = (7,1) \end{cases} \Rightarrow \frac{x-4}{7} = \frac{y-9}{1} \Leftrightarrow \boxed{x-7y+59=0}$$

sistema:

$$\begin{cases} -3x+y+15=0 \\ x-7y+59=0 \end{cases} (\cdot 3) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+y+15=0 \\ 3x-21y+177=0 \end{cases}$$

$$-20y+192=0 \rightarrow y = \frac{48}{5}$$

$$x - 7\cdot\frac{48}{5} + 59 = 0 \rightarrow x = \frac{41}{5}$$

$$\boxed{B' = \left(\frac{41}{5}, \frac{48}{5}\right)}$$

¿C'? Es el punto de corte de la recta r con la recta que pasa por A y C (la llamaremos r_{AC})

$$r_{AC} \begin{cases} A = (4,9) \\ \vec{V} = AC = (5,-5) \equiv (1,-1) \end{cases} \Rightarrow \frac{x-4}{1} = \frac{y-9}{-1} \Leftrightarrow \boxed{x+y-13=0}$$

sistema

$$\begin{cases} -3x+y+15=0 \\ x+y-13=0 \end{cases} (-1) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+y+15=0 \\ -x-y+13=0 \end{cases}$$

$$-4x+28=0 \rightarrow x=7$$

$$7+y-13=0 \rightarrow y=6$$

$$\boxed{C' = (7,6)}$$

Base mayor $B = |BC| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

Base menor $|B'C'|$

$$\vec{B'C'} = C' - B' = (7,6) - \left(\frac{41}{5}, \frac{48}{5}\right) = \left(\frac{-6}{5}, \frac{-18}{5}\right)$$

$$|B'C'| = \sqrt{\left(-\frac{6}{5}\right)^2 + \left(-\frac{18}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{360}}{5} = \frac{6\sqrt{10}}{5}.$$

Altura (*)

Se puede calcular de varios modos.

$$\text{dis}(r, B') = \text{dis}(r, C') = \text{dis}(r_{B'C'}, B) = \text{dis}(r_{B'C'}, C)$$

($r_{B'C'}$ es la recta que pasa por B' y C')

Como hemos calculado la recta r aplicaré

$$h = \text{dis}(r, B)$$

Recuerda la fórmula de la distancia de un punto a una recta.

$$\Rightarrow h = \frac{|-3\cdot 11 + 10 + 15|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2}} = \frac{|-33+25|}{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{8\cdot\sqrt{10}}{10} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\left(2\sqrt{10} + \frac{6\sqrt{10}}{5}\right)\cdot \frac{4\sqrt{10}}{5}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(2 + \frac{6}{5}\right)\cdot\frac{4}{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot 10 = \frac{64}{5}\,u^2 \Rightarrow \boxed{S = \frac{64}{5}\,u^2}$$

Como aparece la distancia de un punto a una recta es conveniente expresar la recta r en forma general:

$$r:\ 3(x+1) = 4(y-4) \Leftrightarrow 3x+3 = 4y-16 \Rightarrow \boxed{r:\ 3x-4y+19=0}$$

ARGUMENTO.

- P es del eje de abscisas $\Rightarrow P=(a,0)$
- $dis(A,P) = dis(P,r)$

Esta última igualdad en coordenadas proporciona la ecuación que determine el valor de a (y por lo tanto de P).

$$\left.\begin{array}{l} dis(A,P) = |AP| = |P-A| = |(a,0)-(5,4)| = \sqrt{(a-5)^2+(-4)^2} \\ dis(P,r) = \dfrac{|3\cdot a-4\cdot 0+19|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \dfrac{|3a+19|}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sqrt{(a-5)^2+16} = \frac{|3a+19|}{5}}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y operando:

$$25\cdot[a^2-10a+25+16] = (3a+19)^2 \Leftrightarrow$$

$$25a^2-250a+1025 = 9a^2+114a+361 \Leftrightarrow$$

$$16a^2-364a+664=0 \Leftrightarrow \boxed{4a^2-91a+166=0} \Rightarrow$$

$$\boxed{a = \frac{91\pm 75}{8} = \begin{cases} a_1 = 83/4 \\ a_2 = 2 \end{cases}} \Rightarrow \boxed{P_1 = \left(\frac{83}{4},0\right) \text{ y } P_2=(2,0)}$$

Haz de rectas (en forma punto-pendiente) que pasan por $P=(2,3)$

$$y-3=m(x-2).$$

¿Qué segmentos determinan con los ejes cartesianos?

Eje X: $y=0 \rightarrow 0-3=m(x-2) \rightarrow x=\frac{2m-3}{m}$.

Eje Y: $x=0 \rightarrow y-3=m\cdot(0-2) \rightarrow y=2m-3$.

Condición:

$$\frac{2m-3}{m}=|2m-3| \quad (*)$$

- $\frac{2m-3}{m}=2m-3 \rightarrow 2m-3=(2m-3)\cdot m \Leftrightarrow (2m-3)\cdot(m-1)=0$

$$\Rightarrow m=1 \quad m=3/2.$$

- $\frac{2m-3}{m}=-(2m-3) \rightarrow 2m-3=-(2m-3)\cdot m \Leftrightarrow (2m-3)\cdot(-m-1)=0$

$$\Rightarrow m=-1 \quad m=3/2.$$

Tenemos 3 soluciones:

- $m=1 \rightarrow y-3=1\cdot(x-2) \Leftrightarrow \boxed{x-y+1=0}$
- $m=-1 \rightarrow y-3=-1\cdot(x-2) \Leftrightarrow -x-y+1=0 \Leftrightarrow \boxed{x+y-5=0}$
- $m=3/2 \rightarrow y-3=\frac{3}{2}(x-2) \Leftrightarrow y-3=\frac{3}{2}x-3 \rightarrow \boxed{y=\frac{3}{2}x}$

La última recta pasa por el origen de coordenadas → no corta a los ejes de cartesianos en "segmentos". Por lo tanto, la descartamos como solución.

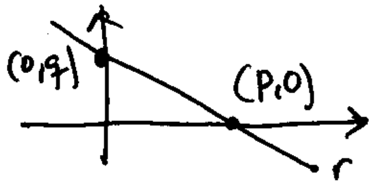
(*) Deben ser iguales las longitudes de los segmentos y una longitud es una cantidad POSITIVA.

51575

OTRO MÉTODO.

Busquemos la recta en forma segmentaria

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1 \qquad (p,q\neq 0)$$



$$P\in r \rightarrow \frac{2}{p}+\frac{3}{q}=1.$$

Segmentos iguales $\longrightarrow$ $|p|=|q| \Leftrightarrow p=\pm q.$

Tendremos 2 sistemas.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2}{p}+\frac{3}{q}=1\\ p=q\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}2q+3p=pq\\ p=q\end{array}\right\} \Leftrightarrow 5p=p^2 \rightarrow \boxed{p=5} \rightarrow \boxed{q=5}$$

$(p\neq 0)$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2}{p}+\frac{3}{q}=1\\ p=-q\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}2q+3p=pq\\ p=-q\end{array}\right\} \Leftrightarrow 2q-3q=-q^2 \Rightarrow q=q^2 \Rightarrow \boxed{q=1} \rightarrow \boxed{p=-1}$$

Soluciones:

$$r:\ \frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1 \leftrightarrow 5x+5y=25 \leftrightarrow \boxed{x+y-5=0}$$

$$r':\ \frac{x}{-1}+\frac{y}{1}=1 \leftrightarrow x-y=-1 \leftrightarrow \boxed{x-y+1=0}$$