ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Son aquellas en las que la incógnita, x, aparece en el argumento de una razón trigonométrica:

Deberemos transformar la ecuación problema en una ecuación equivalente que tenga la forma:

$$\operatorname{sen} x = a \quad , \cos x = b, \quad \operatorname{tg} x = c$$

Observaciones:

Las soluciones de todas ecuaciones trigonométricas son infinitas

- $\operatorname{sen} x = a, \quad x = \arcsin(a) + 360^\circ \cdot n,\ n \in \mathbb{Z}$
- La calculadora sólo da una solución, por lo que deberemos tener en cuenta que
  $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(180^\circ - x)$

  $\cos x = \cos(360^\circ - x)$

  $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(180^\circ + x)$

CASO I.

1º. $$\boxed{2\operatorname{sen} x = 1} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ + 360^\circ \cdot n \\ x_2 = 180^\circ - 30^\circ + 360^\circ \cdot n,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2º $$\boxed{3\cos x = -2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{-2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 131{,}81^\circ + 360^\circ \cdot n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 360^\circ - 131{,}81^\circ + 360^\circ \cdot n,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3º $$\boxed{-4\operatorname{tg} x = 7} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{-7}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -60{,}26^\circ + 360^\circ \cdot n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180^\circ + (-60{,}26^\circ) + 180^\circ + 360^\circ \cdot n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La calculadora nos da como solución − 60,26º que es igual a 360º + (− 60,26º) = 299,74º.

CASO II.

En el argumento de la razón trigonométrica aparece una expresión del tipo (ax+b), siendo a y b números reales.

4º

$$\boxed{\operatorname{sen}(x + 135^\circ) = -0{,}65} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 135^\circ = -40{,}54^\circ + 360^\circ \cdot n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x_2 + 135^\circ = 180^\circ - (-40{,}54^\circ) + 360^\circ \cdot n,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -175{,}54^\circ + 360^\circ \cdot n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 355{,}54^\circ + 360^\circ \cdot n,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

5º

$$\boxed{\cos(3x - 35^\circ) = 0{,}34} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 35^\circ = 70{,}12^\circ + 360^\circ \cdot n,\ n \in \mathbb{Z} \\ 3x_2 - 35^\circ = 360^\circ - 70{,}12^\circ + 360^\circ \cdot n,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{35^\circ + 70{,}12^\circ + 360^\circ \cdot n}{3},\ n \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \dfrac{35^\circ + 360^\circ - 70{,}12^\circ + 360^\circ \cdot n}{3},\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 35{,}04^\circ + 120^\circ \cdot m, \\ x_2 = 108{,}29^\circ + 120^\circ \cdot m,\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

6º

$$\boxed{tg(60^o-2x)=-5}\Rightarrow\begin{cases}60^o-2x_1=-78,69^o+360^o\cdot n, n\in\mathbb{Z}\\60^o-2x_2=180+(-78,69^o)+360^o\cdot n, n\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x_1=-138,69^o+360^o\cdot n, n\in\mathbb{Z}\\-2x_2=41,31^o+360^o\cdot n, n\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=69,35^o+180^o\cdot m,\\x_2=-20,67^o+180^o\cdot m, m\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Observa que $\frac{360n}{-2}=180m, \quad n,m\in\mathbb{Z}$, pues al recorrer n y m los enteros los dos conjuntos recorren los mismos valores

Observación. Las soluciones en el intervalo [0º, 360º] de cada una de las ecuaciones serían:

1º 30º y 150º
2º 131,81º y 228,19º
3º 229,74º y 119,74º
4º 184,46º y 355,54º
5º 35,04º, 35,04º+120º, 35,04º+240º,108,29º, 108,29º+120º y 108,29º+240º.
6º 69,35º, 69,35º+180º, 339,33º y 339,33º+180º.

CASO III.

Otro tipo de ecuaciones trigonométricas es aquel en el que aparecen 2 ó más razones trigonométricas distintas, entonces deberemos transformar la ecuación problema en otra equivalente que tenga sólo un tipo de razón trigonométrica y para ello disponemos de dos identidades:

$$sen^2x+cos^2=1 \text{ y } tgx=\frac{senx}{\cos x}$$

7º $\boxed{senx+\cos^2 x=\frac{1}{3}}\Leftrightarrow senx+\left[1-sen^2x\right]=\frac{1}{3}\Leftrightarrow sen^2x-senx-\frac{2}{3}=0$

Y esta última es una ecuación de 2º grado de incógnita senx.

$$senx=\frac{1\pm\sqrt{1+\frac{8}{3}}}{2}=\begin{cases}senx_1\approx 1,46\\senx_2\approx -0,46\end{cases}$$

La 1º solución no tiene sentido pues senx>1 y la 2ª se reduce al caso I.

8º $\boxed{senx-2\cos x=1}$

Se puede transformar en un sistema no lineal añadiéndole la ecuación $sen^2x+cos^2=1$

$$senx-2\cos x=1\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}senx-2\cos x=1\\sen^2x+cos^2x=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}u=senx\\v=\cos x\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}u-2v=1\\u^2+v^2=1\end{matrix}\right\}, u=1+2v\Rightarrow(1+2v)^2+v^2=1$$

$$\Leftrightarrow 5v^2+4v=0\Rightarrow\begin{cases}v_1=0\Rightarrow\cos x=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=90^o+360^o\cdot n, & n\in Z\\x_2=270^o+360^o\cdot n, & n\in Z\end{cases}\\v_2=\frac{-4}{5}\Rightarrow\cos x=\frac{-4}{5}\Rightarrow\begin{cases}x_3\approx 143,13^o+360^o\cdot n, & n\in Z\\x_4\approx -143,13^o+360^o\cdot n, & n\in Z\end{cases}\end{cases}$$