

1º Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, calcula de forma exacta $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

2º Resuelve la ecuación $\operatorname{tg}(3x + 45^\circ) = \sqrt{3}$. Indica las soluciones en $[0^\circ, 360^\circ]$.

$$\begin{array}{l} \cos x - \operatorname{sen}y = 0 \\ \cos x + \operatorname{sen}^2 y = \frac{3}{4} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \cos x - \operatorname{sen}y = 0 \\ \cos x + \operatorname{sen}^2 y = \frac{3}{4} \end{array} \right\}$$

3º Resuelve el sistema

4º Demuestra que si A, B y C son los ángulos de un triángulo entonces $\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C = \operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}B \cdot \operatorname{tg}C$

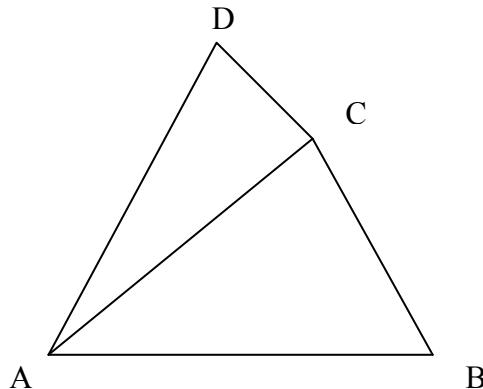
5º Resuelve el triángulo ABC sabiendo que $a=55$ cm, $b=70$ cm y $B=103^\circ$. Calcula su área, el radio de la circunferencia circunscrita, la mediana del vértice A y la altura del lado c.

6º Observa la siguiente figura

Sabiendo que:

En ABC: $A=30^\circ$ y $C=70^\circ$

En ACD: $C=90^\circ$, $A=20^\circ$ y $CD=10$ cm



Calcula el resto de los elementos de cada triángulo y el área del polígono ABCD.

SOLUCIONES

1º Aplicando la relación fundamental de la trigonometría

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \pm \frac{\sqrt{8}}{3} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

se toma el signo negativo porque α pertenece al segundo cuadrante.

Aplicando la fórmula del ángulo doble $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$, con

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-2\sqrt{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{-\sqrt{2}}{4}}{1 - \left(\frac{-\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{-4\sqrt{2}}{7}$$

Aplicando la fórmula del ángulo mitad

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \pm \sqrt{1 - \frac{-2\sqrt{2}}{3}} = \pm \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{6}},$$

se toma el signo positivo porque si $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Con la calculadora $\alpha = 19,471^\circ$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) \Rightarrow \alpha = 180^\circ - 19,471^\circ = 196,529^\circ = \frac{2\pi}{360} 196,529^\circ = 2,801 \text{ rad.}$$

2º

$$\operatorname{tg}(3x + 45^\circ) = \sqrt{3} \Rightarrow 3x + 45^\circ = 60^\circ + 360k, k \in \mathbb{Z}, \Rightarrow x = \frac{15 + 360k}{3} = 5 + 120k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x_0 = 5^\circ \\ k = 1 \Rightarrow x_1 = 125^\circ \\ k = 2 \Rightarrow x_2 = 245^\circ \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}(3x + 45^\circ) = \sqrt{3} \Rightarrow 3x + 45^\circ = 180^\circ + 60^\circ + 360k, k \in \mathbb{Z}, \Rightarrow x = \frac{195 + 360k}{3} = 65 + 120k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x_0 = 65^\circ \\ k = 1 \Rightarrow x_1 = 185^\circ \\ k = 2 \Rightarrow x_2 = 305^\circ \end{cases}$$

3º

$$\cos x = \operatorname{sen} y \Rightarrow \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}^2 y = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen} y - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow 4\operatorname{sen}^2 y + 4\operatorname{sen} y - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen} y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

la segunda solución no es válida pues es >-1 .

$$\operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ y_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\cos x = \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}, \text{ las soluciones del sistema serían:}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ y_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ y_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ y_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ y_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$$

4º

Recuerda que $\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B}{1 - \operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}B}$

$$\boxed{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B} = (1 - \operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}B) \cdot \operatorname{tg}(A+B) = (1 - \operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}B) \cdot \operatorname{tg}(180 - C) = (1 - \operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}B) \cdot (-\operatorname{tg}C)$$

$$= \boxed{-\operatorname{tg}C + \operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}B \cdot \operatorname{tg}C}$$

5º

Aplicando el teorema del seno para calcular A

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} \Rightarrow \operatorname{sen}A = \frac{a \cdot \operatorname{sen}B}{b} = \frac{55 \cdot \operatorname{sen}105^\circ}{70} = 0,765 \Rightarrow A = \begin{cases} A = 49,95^\circ \\ A' = 180 - A = 130,05^\circ \end{cases}$$

La 2ª solución no es válida pues $A' + B = 103^\circ + 130,05^\circ > 180^\circ$.

$$C = 180 - A - B = 27,05^\circ$$

Aplicando el teorema del seno para calcular c:

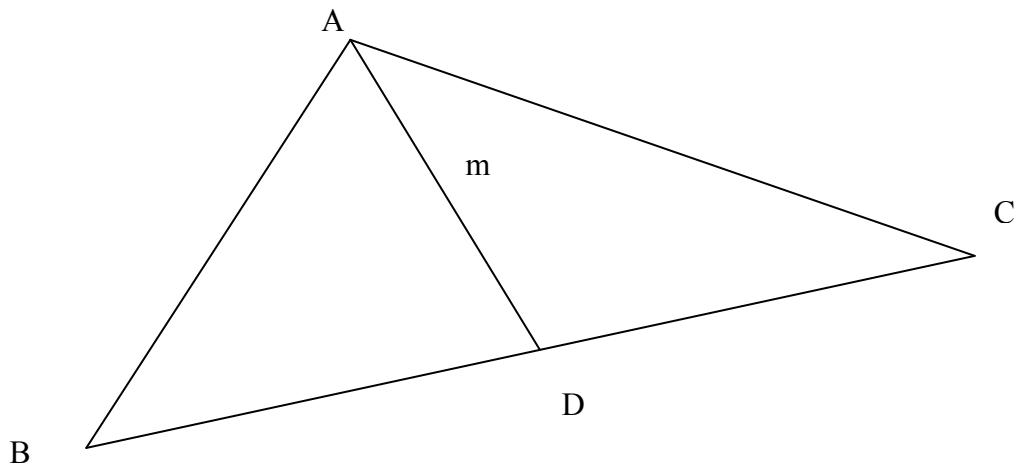
$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A} = \frac{55 \cdot \operatorname{sen}27,05^\circ}{\operatorname{sen}49,95^\circ} \approx 32,47 \text{ cm}$$

El área, S, del triángulo ABC es $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \operatorname{sen}C = \frac{1}{2} 55 \cdot 70 \cdot \operatorname{sen}27,05 \approx 875,428 \text{ cm}^2$

El radio de la circunferencia circunscrita, R, es

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} = 2 \cdot R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \cdot \operatorname{sen}A} = \frac{55}{2 \cdot \operatorname{sen}49,95} \approx 35,925 \text{ cm}$$

La mediana del vértice A. Observa el dibujo:



En el triángulo BDA $a = \frac{BC}{2} = \frac{55}{2} = 27,5\text{cm}$ y aplicando el teorema del coseno en el triángulo BDA sobre el ángulo B:

$$m_a^2 = 27,5^2 + 32,67^2 - 2 \cdot 27,5 \cdot 32,67 \cdot \cos 103^\circ \Rightarrow m_a = 47,199\text{cm}$$

La altura del lado c, h_c , se calcula aplicando la fórmula del área

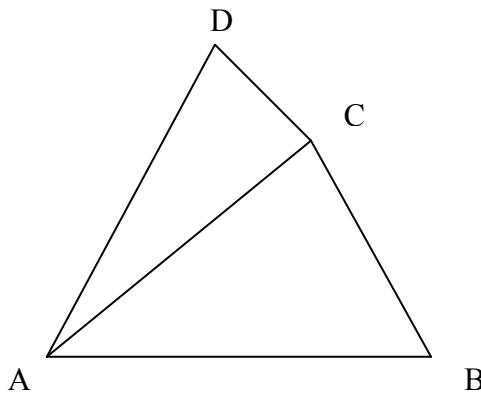
$$S = \frac{1}{2}c \cdot h_c \Rightarrow h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 875,428}{32,47} = 53,922\text{cm}.$$

6º Observa la siguiente figura

Sabiendo que:

$$\text{En } ABC: A=30^\circ \text{ y } C=70^\circ$$

$$\text{En } ACD: C=90^\circ, A=20^\circ \text{ y } CD=10 \text{ cm}$$



Calcula el resto de los elementos de cada triángulo y el área del polígono ABCD.

Triángulo ACD

$$\text{El triángulo ACD es recto en C: } \sin A = \frac{CD}{AD} \Rightarrow \sin 20 = \frac{10}{AD} \Rightarrow AD = \frac{10}{\sin 20} = 29,238\text{cm}$$

$$D=180-A-C=180-20-90=70^\circ.$$

$$\cos A = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC = AD \cos A = 29,238 \cos 20 = 27,474\text{cm}$$

$$\text{Área de ACD, } S_1, S_1 = \frac{1}{2}AC \cdot CD = \frac{1}{2}27,474 \cdot 10 = 137,37\text{cm}^2$$

Triángulo ABC

$$B=180-A-C=180-30-70=80^\circ.$$

AB y BC se obtienen directamente mediante el teorema del seno, pues AC es 27,474 cm.

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow BC = \frac{AC \cdot \sin A}{\sin B} = \frac{27,474 \cdot \sin 30}{\sin 80} = 13,948\text{cm}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AB = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{27,474 \cdot \sin 70}{\sin 80} = 26,215\text{cm}$$

$$\text{Área de ACD, } S_2, S_2 = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin A = \frac{1}{2}26,215 \cdot 27,474 \cdot \sin 30^\circ = 180,057\text{cm}^2$$

El área de la figura ABCD es $S_1 + S_2 = 317,427\text{cm}^2$