

1° Una señal de carretera indica que la pendiente de ese tramo es del 12%, lo que quiere decir que por cada 100 metros que recorre en horizontal asciende 12 metros. ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal? ¿Y si fuera del 24%? Obtén la fórmula general que relaciona la pendiente de una carretera, p (expresada en %) con el ángulo α que forma la carretera con la horizontal.

2° Calcula el ángulo que forma la diagonal de una cara con la diagonal del cubo.

3° Resuelve el triángulo del cual se conoce su perímetro: 30 cm y la medida de dos de sus ángulos: 40° y 80° .

4° Indica en cada uno de los siguientes casos, si el triángulo correspondiente es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

- a) $a=97, b=72, c=65$
- b) $a=90, b=72, c=65$
- c) $a=100, b=72, c=65$

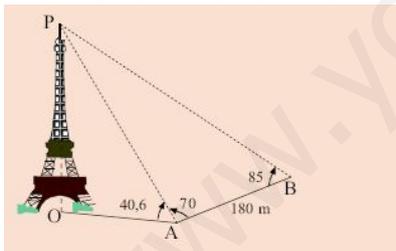
(Observación: no es necesario resolver el triángulo)

5° Para calcular la anchura de un río fijamos dos puntos A y B, ambos situados en nuestra orilla distantes 5 metros uno de otro. Observamos un árbol cuya base está situada en la orilla opuesta. Las visuales al árbol con la línea que une A y B forman ángulos de 55° y 65° respectivamente. Calcula la anchura del río. (Observación: el problema admite DOS planteamientos.)

6° Resuelve los triángulos:

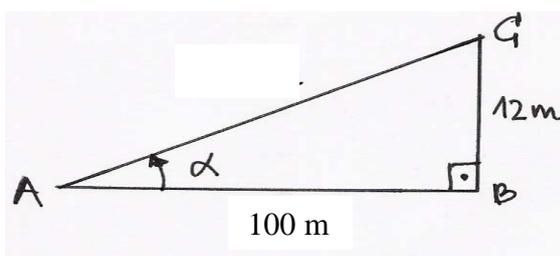
- a) $A=45^\circ, a=8 \text{ cm}, b=10 \text{ cm}.$
- a) $a=23 \text{ cm}, B=53^\circ, C=84^\circ.$
- b) $a=5 \text{ cm}, b=4 \text{ cm}, C=47^\circ.$
- c) $a=5 \text{ cm}, b=4 \text{ cm}, c=11 \text{ cm}.$
- d) $a=2 \text{ cm}, b=9 \text{ cm}, A=125^\circ.$

7° Para calcular la altura de la torre Eiffel sin acceder hasta su base, una persona efectúa las medidas de los ángulos del dibujo en dos puntos A y B separados 180 m. ¿Cuánto mide la altura OP de la torre Eiffel?



SOLUCIONES

1° Considera la figura



AC carretera, AB horizontal, BC vertical
Caso 12%

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{100} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 0,12 \approx 5^{\circ} 42' 38''$$

Caso 24%

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{100} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 0,24 \approx 13^{\circ} 29' 44''$$

Caso p%

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{100} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{p}{100}$$

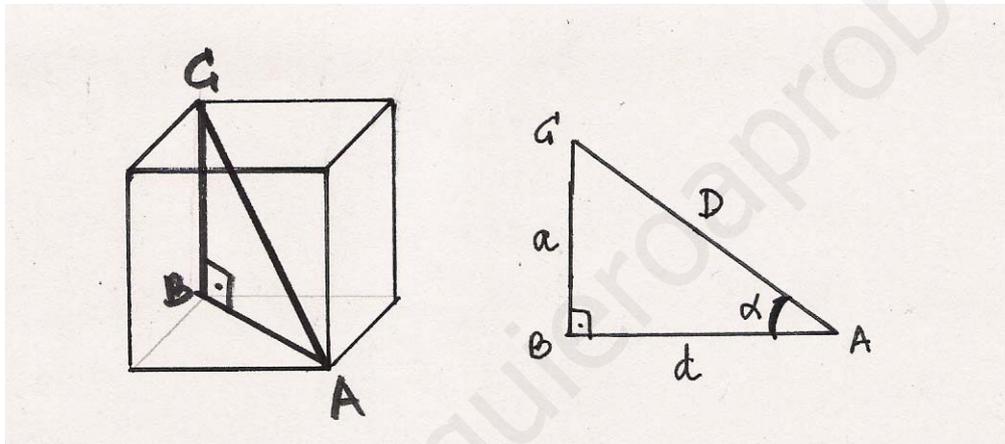
2°

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}$$

$$D^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow D = a\sqrt{3}$$

Considera el triángulo rectángulo

$$\cos \alpha = \frac{d}{D} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \alpha = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 35^{\circ} 15' 51'' = 0,6154 \text{ rad}$$



3° Sea $A=40^{\circ}$ y $B=80^{\circ}$ $C=180^{\circ}-A-B=60^{\circ}$

Aplicamos el teorema del seno

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \Leftrightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{30-(a+b)}{\operatorname{sen} C}$, pues $a+b+c=30$, y tenemos un sistema de dos ecuaciones con 2 incógnitas: a y b.

$$\begin{cases} a \cdot \operatorname{sen} 80^{\circ} = b \cdot \operatorname{sen} 40^{\circ} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \operatorname{sen} 80^{\circ}}{\operatorname{sen} 40^{\circ}} \Rightarrow a \cdot \operatorname{sen} 60^{\circ} = \left(30 - a - \frac{a \cdot \operatorname{sen} 80^{\circ}}{\operatorname{sen} 40^{\circ}}\right) \cdot \operatorname{sen} 40^{\circ} \Rightarrow \\ a \cdot \operatorname{sen} 60^{\circ} = (30 - a - b) \cdot \operatorname{sen} 40^{\circ} \end{cases}$$

$$a(\operatorname{sen} 60^{\circ} + \operatorname{sen} 40^{\circ} + \operatorname{sen} 80^{\circ}) = 30 \cdot \operatorname{sen} 40^{\circ} \Rightarrow a = \frac{30 \cdot \operatorname{sen} 40^{\circ}}{\operatorname{sen} 60^{\circ} + \operatorname{sen} 40^{\circ} + \operatorname{sen} 80^{\circ}} \approx 7,73 \text{ cm}$$

$$b = \frac{a \cdot \operatorname{sen} 80^{\circ}}{\operatorname{sen} 40^{\circ}} \approx \frac{7,73 \cdot \operatorname{sen} 80^{\circ}}{\operatorname{sen} 40^{\circ}} \approx 11,84 \text{ cm} \Rightarrow c = 30 - a - b \approx 10,43 \text{ cm}$$

4° Estudiaremos el ángulo mayor, que está asociado al lado mayor.
El teorema del coseno establece que

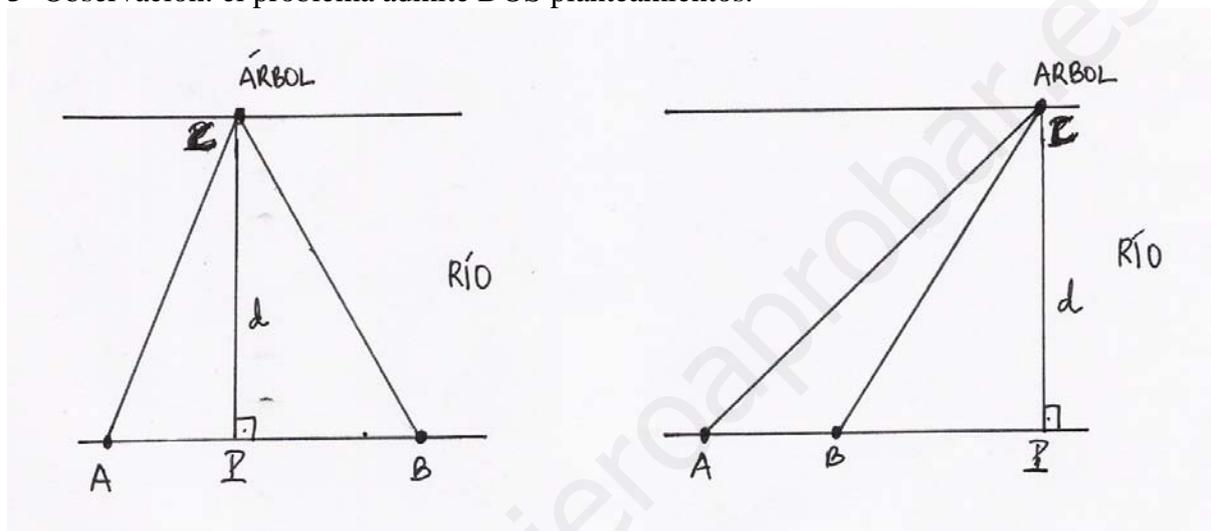
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$\text{a) } \cos A = \frac{72^2 + 65^2 - 97^2}{2 \cdot 72 \cdot 65} = 0 \Rightarrow A = 90^\circ.$$

$$\text{b) } \cos A = \frac{72^2 + 65^2 - 90^2}{2 \cdot 72 \cdot 65} = \frac{1309}{9360} > 0 \Rightarrow A < 90^\circ \Rightarrow \text{es un triángulo acutángulo.}$$

$$\text{c) } \cos A = \frac{72^2 + 65^2 - 100^2}{2 \cdot 72 \cdot 65} = \frac{-591}{9360} < 0 \Rightarrow A > 90^\circ \Rightarrow \text{es un triángulo obtusángulo.}$$

5° Observación: el problema admite DOS planteamientos.



Caso 1: El árbol está entre A y B.

En el triángulo ABC: $A = 55^\circ$, $B = 65^\circ$, $C = 180^\circ - A - B = 60^\circ$, $c = 5\text{m}$. Sea **C** la base del árbol, **d** la distancia de la orilla al árbol (altura del lado AB en el triángulo ABC) y **P** la proyección de C sobre AB.

Planteamiento:

$$\text{Triángulo APC (rectángulo en P): } \operatorname{sen} A = \frac{d}{b} \Rightarrow d = b \cdot \operatorname{sen} A = b \cdot \operatorname{sen} 55^\circ$$

$$\text{Triángulo ABC: teorema del seno } \frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow \frac{5}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{b}{\operatorname{sen} 65^\circ} \Rightarrow b = \frac{5 \cdot \operatorname{sen} 65^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ} \approx 5.23\text{m}$$

$$\Rightarrow d \approx 5.23 \operatorname{sen} 55^\circ \approx 4.28\text{m}$$

Caso 2: El árbol NO está entre A y B.

En el triángulo ABC: $A = 55^\circ$, $B = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$, $C = 180^\circ - A - B = 10^\circ$, $c = 5\text{m}$. Sea **C** la base del árbol, **d** la distancia de la orilla al árbol (altura del lado AB en el triángulo ABC) y **P** la proyección de C sobre la recta que contiene a AB.

Planteamiento:

$$\text{Triángulo APC (rectángulo en P): } \operatorname{sen} A = \frac{d}{b} \Rightarrow d = b \cdot \operatorname{sen} A = b \cdot \operatorname{sen} 55^\circ$$

$$\text{Triángulo ABC: teorema del seno}$$

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow \frac{5}{\operatorname{sen} 10^\circ} = \frac{b}{\operatorname{sen} 115^\circ} \Rightarrow b = \frac{5 \cdot \operatorname{sen} 115^\circ}{\operatorname{sen} 10^\circ} \approx 26.09\text{m}$$

$$\Rightarrow d \approx 26.09 \operatorname{sen} 55^\circ \approx 21.37\text{m}$$

Observación: la posición relativa es la del dibujo pues la visual de A es menor que la visual de B

6º Resuelve los triángulos:

a) **A=45°, a=8 cm, b=10 cm.**

¿B? Teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{senA}} = \frac{b}{\text{senB}} \Rightarrow \frac{8}{\text{sen}45^\circ} = \frac{10}{\text{senB}} \Rightarrow \text{senB} = \frac{10 \cdot \text{sen}45^\circ}{8} \approx 0,88 \text{cm} \Rightarrow \begin{cases} B \approx 62,11^\circ = 62^\circ 6'36'' \\ B' = 180 - B \approx 117,89^\circ = 117^\circ 53'24'' \end{cases}$$

Veamos si las dos soluciones son válidas:

Si $B=62,11^\circ$ $C=180^\circ-A-B \approx 17,11^\circ$ y c se obtiene aplicando el teorema del seno

$$\frac{c}{\text{senC}} = \frac{a}{\text{senA}} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \text{senC}}{\text{senA}} = \frac{8 \cdot \text{sen}17,11}{\text{sen}45} \approx 3,32 \text{cm}$$

Si $B'=117,89^\circ$ $C'=180^\circ-A-B' \approx 72,89^\circ$ y c' se obtiene aplicando el teorema del seno

$$\frac{c'}{\text{senC}'} = \frac{a}{\text{senA}} \Rightarrow c' = \frac{a \cdot \text{senC}'}{\text{senA}} = \frac{8 \cdot \text{sen}72,89}{\text{sen}45} \approx 10,81 \text{cm}$$

b) **a=23 cm, B=53°, C=84°.**

¿A? $A=180^\circ-B-C=43^\circ$

¿b? Teorema del seno $\frac{b}{\text{senB}} = \frac{a}{\text{senA}} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \text{senB}}{\text{senA}} = \frac{23 \cdot \text{sen}53^\circ}{\text{sen}43^\circ} \approx 26,93 \text{cm}$

¿c? Teorema del seno $\frac{c}{\text{senC}} = \frac{a}{\text{senA}} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \text{senC}}{\text{senA}} = \frac{23 \cdot \text{sen}84^\circ}{\text{sen}43^\circ} \approx 33,53 \text{cm}$

c) **a=5 cm, b=4 cm, C=47°.**

¿c? Teorema del coseno

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C \Rightarrow c^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 47^\circ \Rightarrow c \approx 3,70 \text{cm}$$

¿B? Teorema del seno

$$\frac{b}{\text{senB}} = \frac{c}{\text{senC}} \Rightarrow \text{senB} = \frac{b \cdot \text{senC}}{c} = \frac{4 \cdot \text{sen}47^\circ}{3,70} \approx 0,79 \Rightarrow \begin{cases} B \approx 52,24^\circ = 52^\circ 14'24'' \\ B' = 180 - B \approx 127,76^\circ \end{cases}$$

La 2º solución, B' , no es posible pues $A=180^\circ-B'-C=5,24^\circ$ con $A < B$ y $a > b$.

¿A? $A=180-B-C=80,76^\circ=80^\circ 45'36''$

d) **a=5 cm, b=4 cm. c=11 cm.**

No es posible pues $a + b < c$

e) **a=2 cm, b=9 cm, A=125°.**

¿B? Teorema del seno: $\frac{b}{\text{senB}} = \frac{a}{\text{senA}} \Rightarrow \text{senB} = \frac{b \cdot \text{senA}}{a} = \frac{9 \cdot \text{sen}125^\circ}{2} \approx 3,68 > 1 \Rightarrow$ no es posible.

7º Se consideran los triángulos AOP, recto en O y ABP. Sea OP la altura de la torre.

En AOP $\text{sen}40,6^\circ = \frac{OP}{b} \Rightarrow OP = b \cdot \text{sen}40,6^\circ$

En ABP $P=180^\circ-A-B=25^\circ$, $p=180\text{m}$ y aplicando el teorema del seno

$$\frac{b}{\text{senB}} = \frac{p}{\text{senP}} \Rightarrow b = \frac{p \cdot \text{senB}}{\text{senP}} = \frac{180 \cdot \text{sen}85^\circ}{\text{sen}25^\circ} \approx 424,29 \text{m}$$

$$\Rightarrow OP \approx 424,29 \cdot \text{sen}40,6^\circ \approx 276,12 \text{m}$$