1º Calcula los lados y el área de un paralelogramo de diagonales 70 y 50 cm sabiendo que el ángulo que forman es de 40º.
(Observación: las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.)

2º Calcula de forma exacta sen75º y tg105º.

3º Sabiendo que $tg\alpha = -3$ y $\alpha \in IV$ calcula $\cos\frac{\alpha}{2}$.

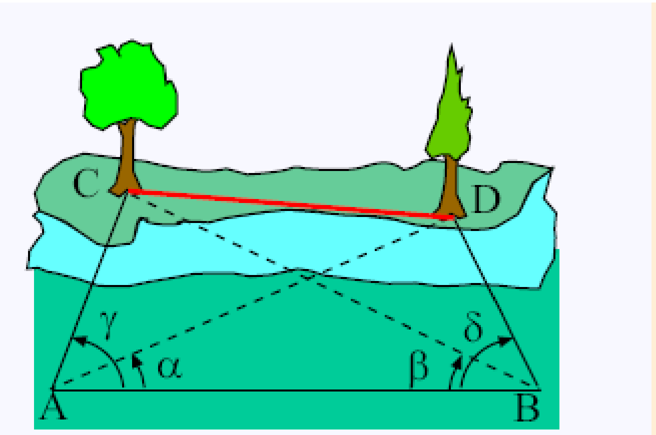
4º Resuelve: $tgx + 4\cot gx = 5$, expresa las soluciones en radianes.

5º Resuelve: $\cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right) = sen\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)$

6º Para calcular la distancia CD entre dos árboles inaccesibles se efectúan las siguientes mediciones:

AB = 400m

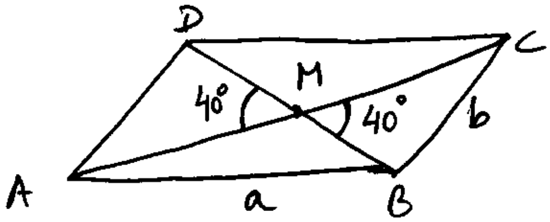
$\alpha = 26º34'$, $\beta = 59{,}45º$, $\gamma = 75{,}26º$ y $\delta = 80º$



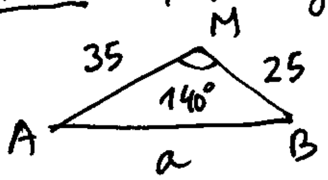
7º Comprueba la siguiente igualdad trigonométrica $\frac{sen2a}{1+\cos 2a} = tga$

8º Resuelve el triángulo a = 9, b = 11 y B = 50º. Calcula asimismo su área y el radio de la circunferencia circunscrita.

Sea el paralelogramo

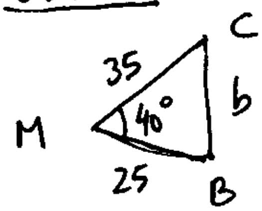


- <u>lado a</u> → triángulo $\widehat{AMB}$



teorema del coseno: $a^2 = 35^2 + 25^2 - 2 \cdot 35 \cdot 25 \cdot \cos 140° \Rightarrow \boxed{a \simeq 56{,}49 \text{ cm}}$

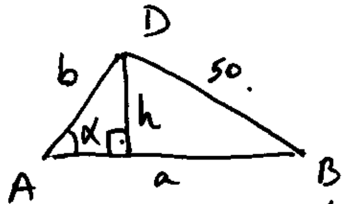
- <u>lado b</u> → triángulo $\widehat{MBC}$



teorema del coseno: $b^2 = 35^2 + 25^2 - 2 \cdot 35 \cdot 25 \cdot \cos 40° \Rightarrow \boxed{b \simeq 22{,}57 \text{ cm}}$

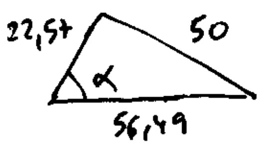
- <u>área de ABCD.</u>

Consideremos el triángulo $\widehat{ABD}$



Si obtuviéramos h el área del paralelogramo sería $S = a \cdot h$.

¿α?



→ $50^2 = 56{,}49^2 + 22{,}57^2 - 2 \cdot 22{,}57 \cdot 56{,}49 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha \simeq 61{,}91°}$

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{h}{22{,}57} \rightarrow \boxed{h \simeq 19{,}91 \text{ cm}}$

$\Rightarrow \boxed{S = 1124{,}84 \text{ cm}^2}$

$\operatorname{sen} 75^\circ = \operatorname{sen}(30^\circ + 45^\circ)$.

- fórmula del seno de la suma

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

- razones trigonométricas de 30° y 45°.

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

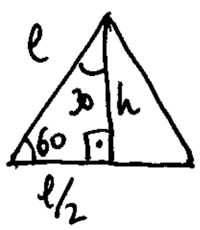
$$\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} 75^\circ} = \operatorname{sen}(30^\circ+45^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \operatorname{sen} 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

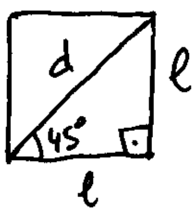
RECUERDA.

¿30°? triángulo equilátero



$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

¿45°? cuadrado



$$d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d = l\sqrt{2}.$$

$tg\, 105^\circ$

$$105^\circ = 45^\circ + 60^\circ$$

$$tg\, 105^\circ = tg\,(45^\circ + 60^\circ) = \frac{tg 45^\circ + tg 60^\circ}{1 - tg 45^\circ \cdot tg 60^\circ} = \frac{1+\sqrt{3}}{1 - 1\cdot\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\,.$$

Racionalizando:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{1+2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{1-(\sqrt{3})^2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{1-3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow \boxed{tg\, 105^\circ = -2-\sqrt{3}}$$

$$\cos \alpha/2 = \pm \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

- signo de $\cos \alpha/2$.

$\alpha \in \mathrm{IV} \Leftrightarrow 270° < \alpha < 360° \Rightarrow \frac{270°}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{360°}{2} \Leftrightarrow$

$135° < \frac{\alpha}{2} < 180° \Rightarrow \alpha/2 \in \mathrm{II}. \Rightarrow \cos\alpha/2$ será NEGATIVO.

- ¿$\cos\alpha$?

empleamos la relación: $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1+(-3)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = + \frac{1}{\sqrt{10}} = + \frac{\sqrt{10}}{10}$.

se toma la solución POSITIVA porque $\alpha \in \mathrm{IV}$ y en él $\cos\alpha > 0$.

$$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{10}}{10}}{2}}$$

operando en el radicando:

$$\frac{1+\frac{\sqrt{10}}{10}}{2} = \frac{10+\sqrt{10}}{20} \Rightarrow \boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{10+\sqrt{10}}{20}}}$$

$$\boxed{tg\,x + 4\,cotg\,x = 5}$$

$\Leftrightarrow \quad tg\,x + \dfrac{4}{tg\,x} = 5$ cambio de variable : $tg\,x = y$

$$y + \frac{4}{y} = 5 \Leftrightarrow y^2 + 4 = 5y \Leftrightarrow \boxed{y^2 - 5y + 4 = 0}$$

$$\Rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1. \end{cases} \Rightarrow$$

$$tg\,x = 4 \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = arctg\, 4 = 1{,}33 + 2\pi k \\ x_2 = = 1{,}33 + \pi + 2\pi k., \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

$$tg\,x = 1 \rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 45^\circ + 360k \quad = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x_4 = 45^\circ + 180 + 360k. = \frac{\pi}{4} + \pi + 2\pi k., \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Recuerda que $tg\,\alpha = tg\,(\alpha + 180^\circ)$

$$\boxed{\cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)=\operatorname{sen}\left(-x+\frac{\pi}{3}\right).}$$

- recuerda que $\cos\alpha=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$$\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}-\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)\right]=\operatorname{sen}\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)\iff\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{10}-2x\right)=\operatorname{sen}\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)}$$

Hay 2 opciones

(1) $$\frac{3\pi}{10}-2x=-x+\frac{\pi}{3}+2\pi k \iff \cancel{-2x}+x=\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{10}+2\pi k$$

$$\iff -x=\frac{\pi}{30}+2\pi k \implies \boxed{x=-\frac{\pi}{30}+2\pi k}\quad k\in\mathbb{Z}.\quad (*)$$

(2) $$\frac{3\pi}{10}-2x=\pi-\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)+2\pi k \iff -2x-x=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{10}+2\pi k$$

$$\iff -3x=\frac{11\pi}{30}+2\pi k \implies \boxed{x=\frac{-11\pi}{90}+\frac{2\pi}{3}k.}\quad k\in\mathbb{Z}.$$

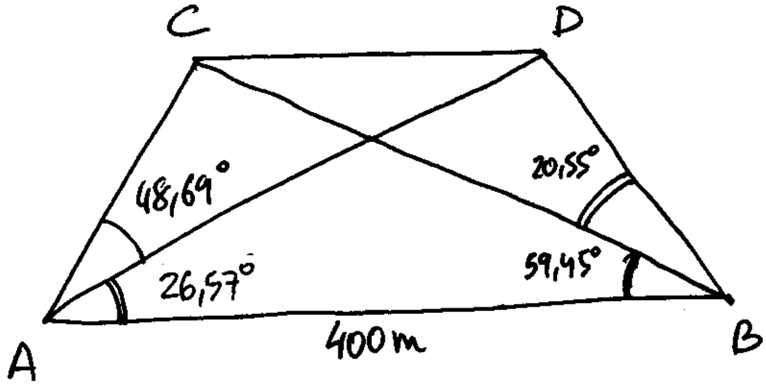
Observaciones:

- $$\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\beta\iff\begin{cases}\alpha=\beta\\ \alpha=180^{\circ}-\beta. \quad \text{ó} \quad \alpha=\pi-\beta \quad (\text{radianes})\end{cases}$$

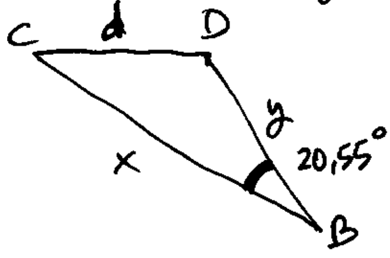
- (*) $$-x=\frac{\pi}{30}+2\pi k \iff x=-\frac{\pi}{30}-2\pi k=-\frac{\pi}{30}+2\pi k$$

$k\in\mathbb{Z}$.

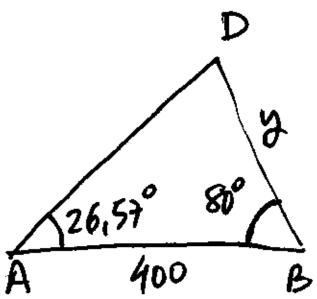
Con los datos que nos da el problema



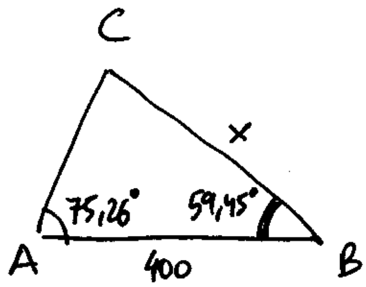
Observa los 3 triángulos



(I)



(II)



(III)

Argumentos:

- con el teorema del seno se calculan x e y en (II) y (III).
- con el teorema del coseno se calcula d en (I).

$\widehat{ABD}$ $\qquad \dfrac{y}{\text{sen } 26,57°} = \dfrac{400}{\text{sen } D}$ $\qquad D = 180° - 80° - 26,57° = 73,43°$

$$\Rightarrow y = \frac{400 \cdot \text{sen } 26,57°}{\text{sen } 73,43°} \Rightarrow \boxed{y \simeq 187 m}$$

$\widehat{ABC}$ $\qquad \dfrac{x}{\text{sen } 75,26°} = \dfrac{400}{\text{sen } C}$ $\qquad C = 180° - 75,26° - 59,45° = 45,29°$

$$\Rightarrow x = \frac{400 \cdot \text{sen } 75,26°}{\text{sen } 45,29°} \Rightarrow \boxed{x \simeq 544 m}$$

En $\widehat{CDB}$

$$d^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos 20{,}55^\circ \simeq$$

$$= 544^2 + 187^2 - 2 \cdot 544 \cdot 187 \cdot \cos 20{,}55^\circ \Rightarrow$$

$$\boxed{d \simeq 375 \text{ m}}$$

Observaciones:

- Se podría haber elegido el triángulo $\widehat{ACD}$, en él aparece la incógnita $d = CD$

- Los triángulos $\widehat{ABD}$ y $\widehat{ABC}$ son auxiliares: se necesitan resolver para resolver $\widehat{BCD}$.

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \qquad \Rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}{1+\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{\underbrace{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1} + \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cdot\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha .$$

$$\leftarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{\underbrace{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}+\underbrace{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{\cos 2\alpha + 1} = \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

Se trata de un triángulo del que conocemos 2 lados y un ángulo no comprendido.

$a = 9 \qquad A =$

$b = 11 \qquad B = 50^\circ. \qquad \Rightarrow$

$c = \qquad C =$

$$\boxed{\begin{array}{ll} a=9 & A=38{,}81^\circ \\ b=11 & B=50^\circ \\ c=14{,}4 & C=91{,}19^\circ \end{array}}$$

SOLUCIÓN.

¿A? Teorema del seno.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \Leftrightarrow \frac{9}{\operatorname{sen} A} = \frac{11}{\operatorname{sen} 50^\circ} \Rightarrow \operatorname{sen} A = \frac{9 \cdot \operatorname{sen} 50^\circ}{11} = 0{,}62\ldots$$

$$\Rightarrow A = \operatorname{arc\,sen}(0{,}62\ldots)$$

RECUERDA que la calculadora SÓLO da UNA solución.

$\boxed{A_1 = 38{,}81^\circ}$

$A_2 = 180 - 38{,}81^\circ = 141{,}19^\circ. \rightarrow$ incompatible con el triángulo pues $141{,}19^\circ + 50^\circ > 180^\circ$.

¿C? $C = 180^\circ - A - B$

$$\boxed{C = 180^\circ - 38{,}81^\circ - 50^\circ = \boxed{91{,}19^\circ}}$$

¿c? Teorema del seno.

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \Leftrightarrow \frac{c}{\operatorname{sen} 91{,}19^\circ} = \frac{11}{\operatorname{sen} 50^\circ} \Rightarrow \boxed{c = \frac{11 \cdot \operatorname{sen} 91{,}19^\circ}{\operatorname{sen} 50^\circ} \simeq \boxed{14{,}4}}$$

¿Radio?

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R \Rightarrow \boxed{R = \frac{b}{2 \operatorname{sen} B} = \frac{11}{2 \cdot \operatorname{sen} 50^\circ} \simeq \boxed{7{,}2}}$$

¿Área?

$$\boxed{S = \frac{1}{2} ab \cdot \operatorname{sen} C = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 11 \cdot \operatorname{sen} 91{,}19^\circ \simeq \boxed{49{,}5\,u^2}}$$