CUESTIONARIO DE RESPUESTA MÚLTIPLE (50%)
(Cada respuesta correcta vale 0,5 puntos. Si la contestación es incorrecta, resta 0,2 puntos)

- La función $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+(bx)^2, & x<0\\ b+\sqrt{x+1}, & 0\le x\end{cases}$ es:

a) Continua y derivable si $b = \pm 1$
b) Derivable sólo si $b = 1$
c) Continua sólo si $b = -1$

- Teniendo en cuenta que $\sqrt{64}=8$, utilizando la diferencial se obtiene que el valor de $\sqrt{65}$ es:

a) 8,0823
b) 8,0625
c) 8,06225

- La función $f(x)=2x^3+px^2-3$ corta al eje de abscisas en el intervalo [–1, 1]:

a) Para todo $p < 5$
b) Para todo $p > 1$
c) Sólo si $1 < p < 5$

- El polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x)=\sin x+\cos 2x$, en $x = 0$, es:

a) $P(x)=1+x-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$
b) $P(x)=1+x-2x^2-\frac{1}{6}x^3$
c) $P(x)=1-2x-x^2+\frac{1}{6}x^3$

- El valor que verifica el teorema del valor medio para $f(x)=x^2-ax+3$, en el intervalo (1, 4), es:

a) $\frac{3a}{2}$ b) $\frac{5}{2a}$ c) $\frac{5}{2}$

- El área comprendida entre las dos parábolas $y=x^2$ e $y=-2x^2+3$, vale:

a) $\frac{27}{4}$
b) 4
c) Ninguna de las anteriores, su valor es: _______

- La función $f(x)=\frac{3x^2-ax}{x+2}$ tiene un mínimo relativo en $x = 2$:

a) Cuando $a = 18$
b) Cuando $a = 10$
c) En $x = 2$ no puede tener un mínimo relativo.

- La derivada de $g(x)=\frac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$ en el punto $x=-\frac{1}{2}$ vale:

a) $-\frac{2}{81}$ b) $\frac{24}{7}$ c) $\frac{40}{27}$

- La curva de ecuación $y=3x^2-1$ y la recta $y=4x+b$ son tangentes en el punto $x=\frac{2}{3}$:

a) Para cualquier valor de b.
b) Sólo si $b=-\frac{7}{3}$
c) No son tangentes para ningún valor de b.

- El valor de $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$ es:

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\infty$ c) $-\frac{1}{4}$

PROBLEMAS:

1. (2 puntos) Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

a) Determinar su dominio y asíntotas.
b) Demostrar que es creciente en el intervalo abierto (–1, 1).
c) Determinar sus extremos relativos.
d) Representar la función.

2. (1 punto) Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{a} - ax^2 + 5x + 10, \quad a \neq 0.$$

a) Obtener los valores de a para los cuales la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$ (0,7 puntos).
b) Calcular los extremos relativos de $f(x)$ para $a = 3$ (0,3 puntos).

3. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 5x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x}}\,dx$ (0,5 puntos)

b) $\displaystyle\int x\cos(3x^2)\,dx$ (0,4 puntos)

c) $\displaystyle\int x^2 \ln x\,dx$ (0,6 puntos)

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(3-x)^2}\,dx$ (0,5 puntos)

Soluciones

TEST

1. La función $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+(bx)^2, & x<0\\ b+\sqrt{x+1}, & 0\le x\end{cases}$ es:

a) Continua y derivable si $b = \pm 1$
b) Derivable sólo si $b = 1$
c) Continua sólo si $b = -1$

Sol.

Continuidad en $x = 0$. (Para que sea continua es necesario que los límites laterales sean iguales.)

Por la izquierda: $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{2}x+(bx)^2\right)=0$

Por la derecha: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(b+\sqrt{x+1}\right)=b+1 \Rightarrow b=-1$

Derivabilidad en $x = 0$.
Salvo en $x = 0$, la derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}+2b^2x, & x<0\\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}}, & 0<x\end{cases}$$

Derivada por la izquierda: $\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{2}x+2b^2x\right)=\frac{1}{2}$

Derivada por la derecha: $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ No depende del valor de b.

Luego, la función continua (y derivable) es $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+x^2, & x<0\\ -1+\sqrt{x+1}, & 0\le x\end{cases}$.

2. Teniendo en cuenta que $\sqrt{64}=8$, utilizando la diferencial se obtiene que el valor de $\sqrt{65}$ es:
a) 8,0823 **b) 8,0625** c) 8,06225

Sol.

Se toma $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Mediante la diferencial: $df(x)=f'(x)dx \Rightarrow df(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

Para $x = 64$ y $dx = 1$ se tiene: $df(64)=\frac{1}{2\sqrt{64}}\cdot 1=\frac{1}{16}=0{,}0625$.

Por tanto, $f(65)\approx f(64)+df(64)=8+0{,}0625=8{,}0625$

<u>Mediante la tangente</u> en $x = 64$, que es $y - f(64) = f´(64)(x-64) \Rightarrow y - 8 = \frac{1}{2\sqrt{64}}(x-64) \Rightarrow$

$y = \frac{1}{16}x + 4$.

Para $x = 65$, $f(65) \approx \frac{1}{16}\cdot 65 + 4 = 8{,}0625$

3. La función $f(x) = 2x^3 + px^2 - 3$ corta al eje de abscisas en el intervalo $[-1, 1]$:
a) Para todo $p < 5$
b) Para todo $p > 1$
c) Sólo si $1 < p < 5$

Sol. Por Bolzano.
$f(-1) = -5 + p$; $f(1) = -1 + p$
$f(-1) = -5 + p = 0$ si $p = 5 \Rightarrow$ $f(-1) > 0$ si $p > 5$ y $f(-1) < 0$ si $p < 5$
$f(1) = -1 + p = 0$ si $p = 1 \Rightarrow f(1) < 0$ si $p < 1$ y $f(1) > 0$ si $p > 1$
Por tanto, con toda seguridad, $f(-1) < 0$ y $f(1) > 0$ si $1 < p < 5$; y la función cortará al eje entre -1 y 1. Pero, además, como $f(0) = -3$, siempre que $f(1) > 0$, la función cortará al eje OX en el intervalo $[0, 1]$ que está contenido en $[-1, 1]$, pero esto pasa siempre que $p > 1$. En consecuencia, la respuesta correcta es b)

4. El polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x) = \sin x + \cos 2x$, en $x = 0$, es:

a) $P(x) = 1 + x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

b) $P(x) = 1 + x - 2x^2 - \frac{1}{6}x^3$

c) $P(x) = 1 - 2x - x^2 + \frac{1}{6}x^3$

Sol.
$f(x) = \sin x + \cos 2x \;\rightarrow\; f(0) = 1$
$f´(x) = \cos x - 2\sin 2x \;\rightarrow\; f´(0) = 1$
$f´´(x) = -\sin x - 4\cos 2x \;\rightarrow\; f´´(0) = -4$
$f´´(x) = -\cos x + 8\sin 2x \;\rightarrow\; f´´´(0) = -1$

Por tanto, $P(x) = 1 + x - \frac{4}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 = 1 + x - 2x^2 - \frac{1}{6}x^3$

5. El valor que verifica el teorema del valor medio para $f(x) = x^2 - ax + 3$, en el intervalo $(1, 4)$, es:

a) $\frac{3a}{2}$ b) $\frac{5}{2a}$ **c)** $\frac{5}{2}$

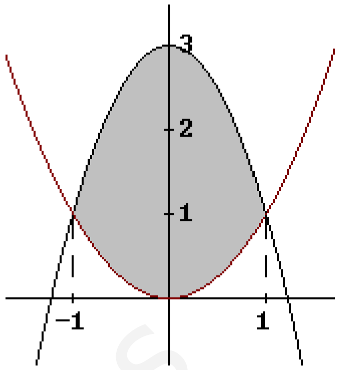
Sol.
$$\frac{f(4) - f(1)}{4-1} = f´(x),\ x \in (1, 4) \Leftrightarrow \frac{19 - 4a - (4-a)}{3} = 2x - a \Rightarrow \frac{15 - 3a}{3} = 2x - a \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

6. El área comprendida entre las dos parábolas $y = x^2$ e $y = -2x^2 + 3$, vale:

a) $\dfrac{27}{4}$ **b) 4** c) Ninguna de las anteriores, su valor es: _______

Sol

La región es la sombreada en la siguiente figura.



Las curvas se cortan en los puntos (–1, 1) y (1, 1), que son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -2x^2 + 3 \end{cases}$$

Como $y = x^2$ va por debajo de $y = -2x^2 + 3$ en el intervalo (–1, 1), el área viene dada por:

$$A = \int_{-1}^{1} (-2x^2 + 3 - x^2)dx = \int_{-1}^{1} (-3x^2 + 3)dx = \left(-x^3 + 3x\right)\Big|_{-1}^{1} = 2 - (-2) = 4$$

7. La función $f(x) = \dfrac{3x^2 - ax}{x + 2}$ tiene un mínimo relativo en x = 2:

a) Cuando *a* = 18

b) Cuando a = 10

c) En x = 2 no puede tener un mínimo relativo.

Sol.

Para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en x = 2 debe cumplirse que: $f'(2) = 0$ y $f''(2) > 0$

$$f'(x) = \frac{(6x - a)(x + 2) - (3x^2 - ax)}{(x + 2)^2} = \frac{3x^2 + 12x - 2a}{(x + 2)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{12 + 24 - 2a}{16} = 0 \Rightarrow a = 18$$

Veamos que, para ese valor de a = 18, $f''(2) > 0$:

$$f''(x) = \frac{96}{(x + 2)^3} \rightarrow f''(2) = \frac{96}{64} > 0$$

8. La derivada de $g(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$ en el punto $x = -\dfrac{1}{2}$ vale:

a) $-\dfrac{2}{81}$ b) $\dfrac{24}{7}$ **c)** $\dfrac{40}{27}$

Sol.

$$g(x) = \frac{e^{2x+1}}{(x-1)^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{2e^{2x+1}(x-1)^2 - e^{2x+1}2(x-1)}{(x-1)^4} \Rightarrow \text{(simplificando)}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{2e^{2x+1}(x-1) - e^{2x+1}2}{(x-1)^3} = \frac{2(x-2)e^{2x+1}}{(x-1)^3} \rightarrow g'(-1/2) = \frac{2\left(-\frac{1}{2} - 2\right)e^0}{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^3} = \frac{-5}{-\frac{27}{8}} = \frac{40}{27}$$

9. La curva de ecuación $y = 3x^2 - 1$ y la recta $y = 4x + b$ son tangentes en el punto $x = \frac{2}{3}$:

a) Para cualquier valor de *b*.

b) Sólo si $b = -\frac{7}{3}$

c) No pueden ser tangentes para ningún valor de *b*.

Sol:
En el punto de tangencia la derivada debe valer 4, que es el valor de la pendiente de la recta tangente.

$$y' = 6x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Para $x = \frac{2}{3}$, $y = 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{1}{3}$.

El punto de tangencia es $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Como ese punto debe cumplir la ecuación de la recta $y = 4x + b$:

$$\frac{1}{3} = 4\cdot\frac{2}{3} + b \Rightarrow b = -\frac{7}{3}$$

10. El valor de $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$ es:

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\infty$ c) $-\frac{1}{4}$

Sol.

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \to 0}\left(\frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right) = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Aplicando L´Hôpital, se tiene:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0}\left(\frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2}}\right) = \frac{1}{2}$$

PROBLEMAS:

1. (2 puntos) Se considera la función $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$

a) Determinar su dominio y asíntotas.
b) Demostrar que es creciente en el intervalo abierto (–1, 1).
c) Determinar sus extremos relativos.
d) Representar la función.

Solución:
a) Dominio: **R** – {1}.
Asíntotas:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x}{(x-1)^2}=\left[\frac{1}{0}\right]=+\infty \Rightarrow x=1 \text{ es A. V.}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{(x-1)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\text{(L´Hôpital)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2(x-1)}=\left[\frac{1}{\pm\infty}\right]=0 \Rightarrow y=0 \text{ es A. H. por la}$$
izquierda y por la derecha.

b) Derivando: $f´(x)=\dfrac{(x-1)^2-2(x-1)\cdot x}{(x-1)^4}=\dfrac{-x-1}{(x-1)^3}$

Como para cualquier valor de x tal que $-1<x<1$, $f´(x)>0 \Rightarrow$ la función es creciente en ese intervalo.

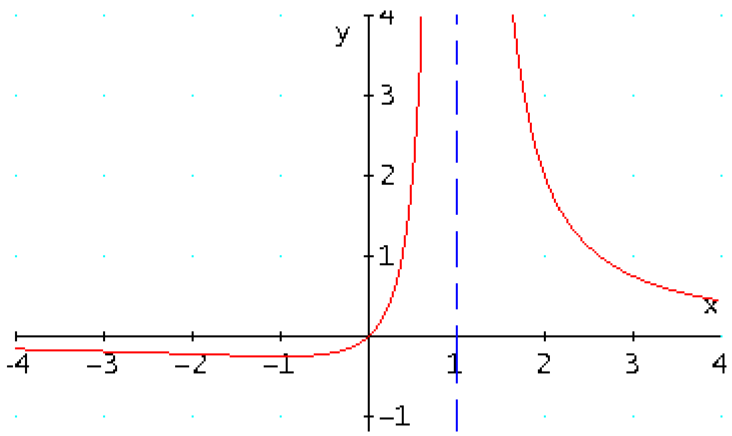
c) $f´(x)=\dfrac{-x-1}{(x-1)^3}=0 \Rightarrow x=-1$ es punto singular.

Como $f´´(x)=\dfrac{2x+4}{(x-1)^4}$ y $f´´(-1)=\dfrac{1}{8}>0$, en $x=-1$ se tiene un mínimo relativo.

No hay más extremos relativos.

d) Por los apartados a) y b) se deduce que la función tiene dos asíntotas, una vertical en $x = 1$ y otra horizontal, la recta $y = 0$.
Además es decreciente si $x < -1$ o si $x > 1$, pues en ambos casos $f´(x)<0$.
Con lo dicho y dando algunos valores puede trazarse su gráfica.

x	$f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$
–3	–0,1875
–2	–0,222
–1	–0,25
0	0
0,5	2
2	2
3	0,75
10	0,123



2. (1 punto) Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{x^3}{a}-ax^2+5x+10,\quad a\neq 0.$$

a) Obtener los valores de a para los cuales la función $f(x)$ tiene un máximo en x = 1 (0,7 puntos).
b) Calcular los extremos relativos de $f(x)$ para a = 3 (0,3 puntos).

Solución:

(a) $f(x)=\frac{x^3}{a}-ax^2+5x+10 \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{a}-2ax+5 \Rightarrow f''(x)=\frac{6x}{a}-2a$

Si tiene un máximo en x = 1, entonces $f'(1) = 0$ y $f''(1) < 0$.
Por tanto,

$$\frac{3}{a}-2a+5=0 \Rightarrow -2a^2+5a+3=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \text{ o } a = 3.$$

Para $a=-\frac{1}{2}$, $f''(x)=-12x+1$ y $f''(1)=-11$
Para a = 3, $f''(x)=2x-6$ y $f''(1) = -4$

Por tanto hay máximos si $a=-\frac{1}{2}$ o a = 3.

Obsérvese que las funciones serían, respectivamente, $f(x)=-2x^3+2x^2+5x+10$ y

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-3x^2+5x+10$$

(b) Para a = 3 la función y sus derivadas son:

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-3x^2+5x+10 \Rightarrow f'(x)=x^2-6x+5 \Rightarrow f''(x)=2x-6$$

La derivada primera se anula en: x = 1 y x = 5.

Como $f''(1)=-4$, en x = 1 hay un máximo; punto (1, 35/3)
Como $f''(5) = 4$, en x = 5 hay un mínimo; punto (5, 5/3).

3. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^3+5x^2-3x+2}{\sqrt{x}}dx$ (0,5 puntos)

b) $\int x\cos\left(3x^2\right)dx$ (0,4 puntos)

c) $\int x^2 \ln x dx$ (0,6 puntos)

d) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(3-x)^2}dx$ (0,5 puntos)

Solución:

a) Operando se tiene:

$$\int \frac{x^3+5x^2-3x+2}{\sqrt{x}}dx = \int\left(x^{5/2}+5x^{3/2}-3x^{1/2}+2x^{-1/2}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{7}x^{7/2}+5\frac{2}{5}x^{5/2}-3\frac{2}{3}x^{3/2}+2\cdot 2x^{1/2}+c = \left(\frac{2}{7}x^3+2x^2-2x+4\right)x^{1/2}+c$$

b) $\int x\cos\left(3x^2\right)dx = \frac{1}{6}\int 6x\cos\left(3x^2\right)dx = \frac{1}{6}\sin\left(3x^2\right)+c$

c) $\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$

Hemos tomado: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

d) Es impropia: $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(3-x)^2}dx = \lim\limits_{b\to-\infty}\int_{b}^{0} \frac{1}{(3-x)^2}dx = \lim\limits_{b\to-\infty}\left(\frac{1}{3-x}\right)\Bigg|_{b}^{0} = \lim\limits_{b\to-\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3-b}\right) = \frac{1}{3}$