

CUESTIONARIO DE RESPUESTA MÚLTIPLE (50%)

(Cada respuesta incorrecta resta 0,2 puntos)

- El $\lim_{x \rightarrow 0}(\operatorname{sen} x \ln x)$ vale:

a) 0; b) -1

c) Ninguna de las anteriores.
- La función $f(x) = (x+3)(x-2)^4$ tiene:

a) Un máximo en $x = 2$.

b) Un punto de inflexión en $x = 2$.

c) Un punto de inflexión en $x = -1$.
- La función $f(x) = e^{-x} - \operatorname{sen} x$ cumple:

a) Corta al eje OX en algún punto $x > \pi/2$

b) Corta al eje OX en algún punto $x < -\pi/2$

c) Nunca corta al eje OX
- La función $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$ tiene:

a) Una asíntota vertical y otra horizontal.

b) Sólo una asíntota horizontal.

c) No tiene asíntotas.
- El polinomio de Taylor de 4º grado de la función $f(x) = x \ln(1+x)$ en el punto $x = 0$ es:

a) $P(x) = (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{(x+1)^3}{3!} + \frac{(x+1)^4}{4!}$

b) $P(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

c) $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4$
- La integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx$ verifica:

a) No puede calcularse ya que uno de sus límites es ∞ .

b) Converge a 3.

c) Converge a 1/3.
- Usando el polinomio de Taylor de grado dos de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$ se puede estimar que:

a) $\sqrt{1,2} \approx 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{200} = 1,095$

b) $\sqrt{1,2} \approx 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{250} = 1,096$

c) Ninguna de las anteriores.
- La ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{4}{x}$ en el punto de abscisa $x = 2$ es:

a) $y - 2 = 2(x - 2)$

b) $y = \frac{1}{2}x + 2$

c) Ninguna de las anteriores, dicha ecuación es: _____
- La discontinuidad, en el punto $x = 0$, de la función $f(x) = \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x}$ puede evitarse definiendo:

a) $f(0) = 1/4$

b) $f(0) = 3/2$

c) Dicha discontinuidad no puede evitarse.
- La función $f(x) = \begin{cases} 5 + 2\operatorname{sen}(ax) & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + bx + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$ verifica:

a) Es continua en $x = 0$ cuando $a = 5/2$.

b) Es derivable en $x = 0$ cuando $b = 2a = 5$.

c) En $x = 0$ nunca puede ser derivable.

PROBLEMAS:

1. Haz un esbozo de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ (0,75 puntos) y calcula el área encerrada entre la curva de $f(x)$ y el eje OX (0,75 puntos).

2. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{x^2 + x - 6}$ (0,6 puntos) b) $\int 2 \ln x dx$ (0,5 puntos)

c) $\int \frac{(x-3)^2}{4x} dx$ (0,4 puntos)

3. Dada la función $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$, halla:

- Dominio de definición y asíntotas. (0,3 puntos)
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (0,7 puntos)
- Extremos locales y los puntos de inflexión. (0,5 puntos)
- Un esbozo gráfico. (0,5 puntos)

PREGUNTAS DE TEST

1. El $\lim_{x \rightarrow 0}(\operatorname{sen} x \ln x)$ vale:

- a) 0; b) -1 c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0}(\operatorname{sen} x \ln x) &= [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

2. La función $f(x) = (x+3)(x-2)^4$ tiene:

- a) Un máximo en $x = 2$.
b) Un punto de inflexión en $x = 2$.
c) Un punto de inflexión en $x = -1$.

Solución:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+3)(x-2)^4 \Rightarrow f'(x) = (x-2)^4 + 4(x+3)(x-2)^3 = 5(x-2)^3(x+2) \\ \Rightarrow f''(x) &= 15(x-2)^2(x+2) + 5(x-2)^3 = 20(x-2)^2(x+1) \end{aligned}$$

3. La función $f(x) = e^{-x} - \operatorname{sen} x$ cumple:

- a) Corta al eje OX en algún punto $x > \pi/2$
b) Corta al eje OX en algún punto $x < -\pi/2$
c) Nunca corta al eje OX

Solución:

La función es continua en todo \mathbf{R} ; por tanto cumple el teorema de Bolzano desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

Como $f(\pi/2) = e^{-\pi/2} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{e^{\pi/2}} - 1 < 0$ y $f(\pi) = e^{-\pi} - \operatorname{sen} \pi = \frac{1}{e^\pi} > 0 \Rightarrow$ la función se anula en algún entre $\pi/2$ y π .

4. La función $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$ tiene:

- a) Una asíntota vertical y otra horizontal.
b) Sólo una asíntota horizontal.
c) No tiene asíntotas.

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1} = 0 \Rightarrow \text{No hay A.V.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

5. El polinomio de Taylor de 4° grado de la función $f(x) = x \ln(1+x)$ en el punto $x = 0$ es:

a) $P(x) = (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{(x+1)^3}{3!} + \frac{(x+1)^4}{4!}$

b) $P(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

c) $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4$

Solución:

$$f(x) = x \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} - \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow \Rightarrow f^{(4)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} + \frac{6}{(1+x)^4}$$

Luego: $f(0) = 0$; $f'(0) = 0$; $f''(0) = 2$; $f'''(0) = -3$; $f^{(4)}(0) = 8$

Por tanto, $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4$

6. La integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx$ verifica:

a) No puede calcularse ya que uno de sus límites es ∞ .

b) Converge a 3.

c) Converge a 1/3.

Solución:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^4} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{3x^3} \right) \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{3t^3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

7. Usando el polinomio de Taylor de grado dos de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$ se puede estimar que:

a) $\sqrt{1,2} \approx 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{200} = 1,095$

b) $\sqrt{1,2} \approx 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{250} = 1,096$

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Calculamos el polinomio de Taylor de grado 2 $f(x) = \sqrt{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} \Rightarrow$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2} \Rightarrow$$

Luego: $f(0) = 1$; $f'(0) = \frac{1}{2}$; $f''(0) = -\frac{1}{4}$;

Por tanto, $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}x^2$

Para $x = 0,2 = 1/5$, se tiene $f(0,2) = \sqrt{0,2+1} = \sqrt{1,2} \approx P(0,2) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2$

8. La ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{4}{x}$ en el punto de abscisa $x = 2$ es:

a) $y - 2 = 2(x - 2)$

b) $y = \frac{1}{2}x + 2$

c) Ninguna de las anteriores, dicha ecuación es: _____

Solución:

a) La ecuación de la recta tangente a la función $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ viene dada por la expresión: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

En este caso: $f(x) = \frac{4}{x} \Rightarrow f(2) = 2; f'(x) = -\frac{4}{x^2} \Rightarrow f'(2) = -1.$

Por tanto, la recta tangente es: $y - 2 = -(x - 2) \Rightarrow y = -x + 4$

9. La discontinuidad, en el punto $x = 0$, de la función $f(x) = \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x}$ puede evitarse definiendo:

a) $f(0) = 1/4$

b) $f(0) = 3/2$

c) Dicha discontinuidad no puede evitarse.

Solución:

La discontinuidad se evita definiendo $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x} = \left[\frac{0}{0} \right] = (L'H) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x} + 3e^{-3x}}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Luego $f(0) = 3/2$

10. La función $f(x) = \begin{cases} 5 + 2\text{sen}(ax) & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + bx + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$ verifica:

a) Es continua en $x = 0$ cuando $a = 5/2$.

b) Es derivable en $x = 0$ cuando $b = 2a = 5$.

c) En $x = 0$ nunca puede ser derivable.

Solución:

Continuidad en $x = 0$:

Si $x \rightarrow 0^-, f(x) \rightarrow 5$

Si $x \rightarrow 0^+, f(x) \rightarrow b \Rightarrow b = 5.$

Por tanto, $f(x) = \begin{cases} 5 + 2\text{sen}(ax) & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + 5x + 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Derivabilidad:

Salvo en $x = 0$, $f'(x) = \begin{cases} 2a \cos(ax) & \text{si } x < 0 \\ 2ax + 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Si $x \rightarrow 0^-, f'(x) \rightarrow 2a$

Si $x \rightarrow 0^+, f'(x) \rightarrow 5 \Rightarrow 2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}.$

PROBLEMAS:

1. Haz un esbozo de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ (0,75 puntos) y calcula el área encerrada entre la curva de $f(x)$ y el eje OX (0,75 puntos).

Solución:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = 1; x = 3.$$

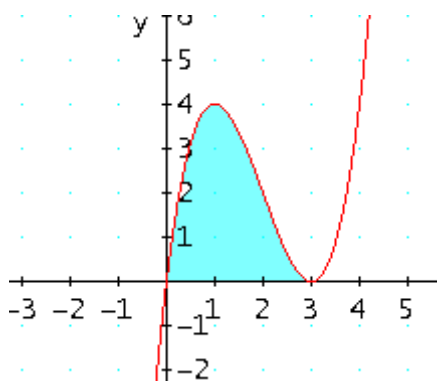
Si $x < 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.

Si $1 < x < 3$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece \Rightarrow En $x = 1$ hay máximo.

Si $x > 3$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece \Rightarrow En $x = 3$ hay mínimo.

Algunos valores: $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 4)$, $(3, 0)$, $(4, 4)$

El esbozo es el siguiente.



La función corta al eje en los puntos $x = 0$ y $x = 3$; por tanto, el área pedida vale

$$S = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 \right]_0^3 = \frac{27}{4}$$

2. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{x^2 + x - 6}$ (0,6 puntos) b) $\int 2 \ln x dx$ (0,5 puntos) c) $\int \frac{(x-3)^2}{4x} dx$ (0,4 puntos)

Solución:

a) Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

Luego:

$$1 = A(x+3) + B(x-2)$$

$$\text{si } x = 2: \quad 1 = 5A \Rightarrow A = 1/5$$

$$\text{si } x = -3: \quad 1 = -5B \Rightarrow B = -1/5$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{x^2 + x - 6} = \int \left(\frac{1/5}{x-2} - \frac{1/5}{x+3} \right) dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{5} \int \frac{1}{x+3} dx = \frac{1}{5} \ln(x-2) - \frac{1}{5} \ln(x+3) + c$$

b) Una primitiva de esa función puede calcularse por el método de partes.

$$\text{Tomando: } u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

se tiene que,

$$2 \int \ln x dx = 2 \left(x \ln x - \int dx \right) = 2(x \ln x - x) + c$$

c) Operando:

$$\int \frac{(x-3)^2}{4x} dx = \int \frac{x^2 - 6x + 9}{4x} dx = \int \frac{1}{4} x dx - \int \frac{3}{2} dx + \int \frac{9}{4x} dx = \frac{1}{8} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{9}{4} \ln x + c$$

3. Dada la función $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$, halla:

- Dominio de definición y asíntotas. (0,3 puntos)
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (0,7 puntos)
- Extremos locales y los puntos de inflexión. (0,5 puntos)
- Un esbozo gráfico.(0,5 puntos)

Solución:

a) Dominio = \mathbf{R} : el denominador nunca se anula.

Tiene una asíntota horizontal, pues: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x+1)}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$

La asíntota es la recta $y = 0$.

b) Derivando:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x+1)e^x - (x+1)^2 e^x}{e^{2x}} = \frac{(x+1)(1-x)}{e^x}$$

La derivada se anula en los puntos $x = -1$ y $x = 1$.

Si $x < -1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

Si $-1 < x < 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece. En consecuencia, en $x = -1$ se tiene un mínimo.

Si $x > 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece. Por tanto, en $x = 1$ se tiene un máximo.

c) (Para la determinación de máximos y mínimos también puede utilizarse la derivada segunda.)

$$f''(x) = \frac{-2xe^x - (1-x^2)e^x}{e^{2x}} = \frac{x^2 - 2x - 1}{e^x}$$

Como $f''(-1) = 2/e^2 > 0$, en $x = -1$ hay un mínimo.

Por ser $f''(1) = -2/e^2 < 0$, en $x = 1$ se tiene un máximo.

La derivada segunda se anula cuando $x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2}$ y $x = 1 - \sqrt{2}$. Para esos valores de x se tienen sendos puntos de inflexión.

d) Calculando el valor de $f(x)$ en algunos puntos se puede hacer un esbozo de la curva.

x	-1	0	1	2	4
$f(x)$	0	1	$4/e = 1,47$	$8/e^2 = 1,08$	$25/e^4 = 0,46$

Con todo lo anterior se traza la siguiente curva.

