Análisis Matemático I EXAMEN FINAL

**CUESTIONARIO DE RESPUESTA MÚLTIPLE (50%)**
(Cada respuesta errónea resta 0,2 puntos)

- La función $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-a}$ tiene:
  a) Un mínimo relativo si $a \neq 1/3$
  b) Una asíntota vertical para cualquier valor de $a \neq 0$.
  c) Ninguna de las anteriores.

- El valor de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - \cos x}{sen^2 x}$ es:
  a) 1/2 b) −1
  c) Ninguna de las anteriores, su valor es: ——

- La curva $y = x^2 - 2x + 1$ y la recta de ecuación $y = 2x - 2$ limitan un recinto finito en el plano cuya área es:
  a) 4/3 b) 7/3
  c) Ninguna de las anteriores, su valor es ——

- La función $f(x) = \dfrac{x^2 - p^2}{x^2 + 3x + 2}$ tiene;
  a) Dos asíntotas verticales para cualquier valor de *p*.
  b) Una asíntota vertical y otra horizontal cualquiera que sea *p*.
  c) Ninguna de las anteriores.

- La función $f(x) = e^x + 2\cos x$
  a) Corta más de dos veces al eje OX.
  b) No corta al eje OX, pues siempre es creciente y positiva.
  c) Ninguna de las anteriores.

- La ecuación de la tangente a la curva $f(x) = \dfrac{6x}{4x^2+1}$ en el punto x = 1 es:
  a) $y = -\dfrac{18}{25}x + \dfrac{48}{25}$
  b) $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{1}{3}$
  c) Ninguna de las anteriores.

- La función $f(x) = (x-1)e^{x+1}$ es:
  a) Creciente para todo x > −1
  b) Convexa (∪) para todo x > −1
  c) Ninguna de las anteriores.

- El valor de $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ es:
  a) +1 b) ∞
  c) Ninguna de las anteriores.

- La ecuación $x^3 - 3x + 40 = 0$ tiene, con seguridad, una raíz al menos en el intervalo:
  a) [2, 3]
  b) [−1, 1]
  c) [−4, −3]

- La función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & si \quad x \leq 0 \\ ax + b & si \quad x > 0 \end{cases}$ es derivable en el punto *x* = 0 cuando:
  a) $a = b = 1$
  b) $a = 2$ y $b = -1$
  c) $a = 2$ y $b = 0$

**PROBLEMAS:**

1. Sea $f(x) = \dfrac{4-2x^2}{x}$.

Halla:

a) Su dominio y sus asíntotas. (1 punto)

b) Su crecimiento y decrecimiento; así como sus máximos y mínimos relativos. (0,5 puntos)

c) Un esbozo de su gráfica. (0,5 puntos)

2. Halla el polinomio de Taylor de grado 4 de la función $f(x) = x\ln(x+1)$, en el punto x = 0. (1 punto)

3. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \left(3x^2 + x - 2\sqrt{x}\right)dx$ (0,4 puntos)

b) $\int x^3 e^{x^2}\,dx$ (0,6 puntos)

c) $\int \left( sen2x - \dfrac{1}{3}\cos 5x \right)dx$ (0,4 puntos)

d) $\int \dfrac{x+2}{x^2-2x+1}\,dx$ (0,6 puntos)

1. La función $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-a}$ tiene:

   a) Un mínimo relativo si $a \neq 1/3$
   b) Una asíntota vertical para cualquier valor de $a \neq 0$.
   **c) Ninguna de las anteriores.**

Sol.

$$f'(x)=\frac{3(x-a)-3x+1}{(x-a)^2}=\frac{1-3a}{(x-a)^2}$$

Si $a \neq 1/3$ la derivada no se anula en ningún caso, la función no puede tener mínimos relativos (ni máximos).

Si $a$ = 1/3, la función es $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-1/3}=\dfrac{3(3x-1)}{3x-1}$; que no está definida en x = 1/3 pero tiene una discontinuidad evitable. Luego no tiene asíntota vertical.

---

2. El valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-\cos x}{sen^2 x}$ es:

a) 1/2 b) −1
**c) Ninguna de las anteriores, su valor es: 1**

Sol.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-\cos x}{sen^2 x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\text{(aplicando L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+senx}{2senx\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\text{(L´H)}=$$

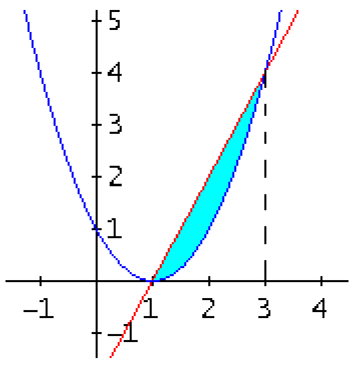
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos x}{2\cos x\cos x-2senxsenx}=\frac{2}{2}=1$$

---

3. La curva $y=x^2-2x+1$ y la recta de ecuación $y=2x-2$ limitan un recinto finito en el plano cuya área es:

**a) 4/3** b) 7/3
c) Ninguna de las anteriores, su valor es ____

Sol.
Como tanto la parábola como la recta pueden dibujarse dando valores, el esquema gráfico no presenta dificultades. Se obtiene la figura siguiente; el recinto es el coloreado.




El área viene dada por:

$$\int_1^3 (2x-2-(x^2-2x+1))dx=\int (-x^2+4x-3)dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right)\Bigg|_1^3=0-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)=\frac{4}{3}$$

4. La función $f(x)=\frac{x^2-p^2}{x^2+3x+2}$ tiene;

a) Dos asíntotas verticales para cualquier valor de *p*.
b) Una asíntota vertical y otra horizontal cualquiera que sea *p*.
**c) Ninguna de las anteriores.**

Sol.

La función pueden tener asíntotas verticales en los puntos que anulan el denominador: en las soluciones de $x^2+3x+2=0$, que son x = –1 y x = –2.

Luego $f(x)=\frac{x^2-p^2}{x^2+3x+2}=\frac{(x-p)(x+p)}{(x+1)(x+2)}$

- Si *p* = ±1, $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-p^2}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x+2}=-2$; pero

  $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-p^2}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-1}{x+2}=\infty$

Sólo habría una asíntota vertical en x = –2

- Si *p* = ±2, habría una asíntota vertical en x = –1 (El razonamiento es análogo.)

También tiene una asíntota horizontal, la recta y = 1, pues $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}=1$

---

5. La función $f(x)=e^x+2\cos x$

**a) Corta más de dos veces al eje OX.**
b) No corta al eje OX, pues siempre es creciente y positiva.
c) Ninguna de las anteriores.

Sol.

$f(0)=e^0+2\cos 0=1+2>0$

$f(-\pi)=e^{-\pi}+2\cos\pi=e^{-\pi}-2<0$

$f(-2\pi)=e^{-2\pi}+2\cos 2\pi=e^{-2\pi}+2>0$

$f(-3\pi)=e^{-3\pi}+2\cos 3\pi=e^{-3\pi}-2<0$

…

Corta infinitas veces al eje OX. Al menos una vez en cada intervalo [–(k + 1)π. –kπ], con k entero positivo.

---

6. La ecuación de la tangente a la curva $f(x)=\frac{6x}{4x^2+1}$ en el punto x = 1 es:

**a)** $y=-\frac{18}{25}x+\frac{48}{25}$ b) $y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ c) Ninguna de las anteriores.

Sol.

$f(x)=\frac{6x}{4x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{6(1-4x^2)}{(4x^2+1)^2}\to$ (*f*(1) = 6/5; *f*´(1) = –18/25)

La tangente es: $y-\frac{6}{5}=-\frac{18}{25}(x-1)\Leftrightarrow y=-\frac{18}{25}x+\frac{48}{25}$

7. La función $f(x)=(x-1)e^{x+1}$ es:
a) Creciente para todo x > –1
**b) Convexa (∪) para todo x > –1**
c) Ninguna de las anteriores.

Sol.
$f(x)=(x-1)e^{x+1} \Rightarrow f'(x)=xe^{x+1} \Rightarrow f''(x)=(x+1)e^{x+1}$
La función tiene un punto de inflexión en x = –1. Para x < –1 es cóncava (∩); para x > –1 es convexa (∪).

---

8. El valor de $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ es:
**a) +1** b) ∞
c) Ninguna de las anteriores.

Sol. $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} xe^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}(-xe^{-x}-e^{-x})\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left((-be^{-b}-e^{-b})+1\right)=1$

---

9. La ecuación $x^3-3x+40=0$ tiene, con seguridad, una raíz al menos en el intervalo:
a) [2, 3]
b) [–1, 1]
**c) [–4, –3]**

Sol.
Como $f(x)=x^3-3x+40$ es continua y, además, $f(-4)=-12$ y $f(-3)=22$, por el teorema de Bolzano, la función corta (una vez al menos) al eje OX en el intervalo [–4, –3].

---

10. La función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & si \quad x\le 0 \\ ax+b & si \quad x>0 \end{cases}$ es derivable en el punto $x$ = 0 cuando:

a) $a = b = 1$
b) $a = 2$ y $b = -1$
**c) $a = 2$ y $b = 0$**

Sol.
Para continua:
Si x → $0^-$, $f(x)=x^2+2x \to 0$
Si x → $0^+$, $f(x)=ax+b \to b \Rightarrow b=0$

Derivable:
$$f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & si \quad x<0 \\ a & si \quad x>0 \end{cases}$$
Si x → $0^-$, $f'(x)=2x+2 \to 2$
Si x → $0^+$, $f'(x)=a \to a \Rightarrow a=2$

**PROBLEMAS**

1. Sea $f(x) = \dfrac{4-2x^2}{x}$.

Halla:

a) Su dominio y sus asíntotas. (1 punto)

b) Su crecimiento y decrecimiento; así como sus máximos y mínimos relativos. (0,5 puntos)

c) Un esbozo de su gráfica. (0,5 puntos)

**Solución:**

a) La función dada está definida para todo valor de x distinto de 0.

La curva tiene por asíntota vertical la recta x = 0, pues $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4-2x^2}{x} = \infty$.

También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador es igual al del denominador más 1.

Como $f(x) = \dfrac{4-2x^2}{x} = -2x + \dfrac{4}{x}$, la asíntota oblicua es $y = -2x$.

Nota: También podría obtenerse mediante límites.

La asíntota oblicua es $y = mx + n$, siendo:

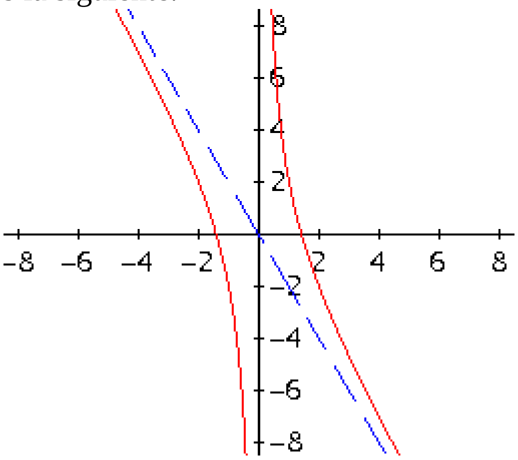
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4-2x^2}{x^2} = -2 \text{ y } n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4-2x^2}{x} + 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x} = 0$$

b) Derivando: $f´(x) = \dfrac{-4x^2 - (4-2x^2)}{x^2} = \dfrac{-2x^2-4}{x^2}$

Como la derivada toma valores negativos en todo su dominio, será decreciente para todo $x \neq 0$.

no se anula nunca, la función no tiene ni máximos ni mínimos.

Su gráfica aproximada es la siguiente.



2. Halla el polinomio de Taylor de grado 4 de la función $f(x) = x\ln(x+1)$, en el punto x = 0. (1 punto)

Sol.

$f(x) = x\ln(x+1) \Rightarrow f(0) = 0$ $\qquad$ $f'(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1} \Rightarrow f'(0) = 0$

$$f''(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow f'''(0) = -3$$

$$f^{4)}(x) = \frac{2}{(x+1)^3} + \frac{6}{(x+1)^6} \Rightarrow f^{4)}(0) = 8$$

$$P(x) = \frac{2x^2}{2!} - \frac{3x^3}{3!} + \frac{8x^4}{4!} = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4$$

3. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \left(3x^2 + x - 2\sqrt{x}\right)dx$ (0,4 puntos) $\quad$ b) $\int x^3 e^{x^2}\,dx$ (0,6 puntos)

c) $\int \left(sen2x - \frac{1}{3}\cos 5x\right)dx$ (0,4 puntos) $\quad$ d) $\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}dx$ (0,6 puntos)

**Solución:**

a) $\int \left(3x^2 + x - 2\sqrt{x}\right)dx = x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2\int x^{1/2}dx = x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2\dfrac{x^{3/2}}{3/2} + c$

b) $\int x^3 e^{x^2}\,dx = \dfrac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2}\,dx = \dfrac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \dfrac{1}{2}e^{x^2} + c$

Por partes:

$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$dv = xe^{x^2}dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}e^{x^2}$

c) $\int \left(sen2x - \dfrac{1}{3}\cos 5x\right)dx = -\dfrac{1}{2}\cos 2x - \dfrac{1}{15}sen5x + c$

d) $\int \dfrac{x+2}{x^2-2x+1}dx$

Por descomposición en fracciones simples se tiene:

$$\frac{x+2}{x^2-2x+1} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A + B(x-1)}{(x-1)^2}$$

Luego:

$x + 2 = A + B(x-1)$

si $x$ = 1: $\quad$ 3 = A $\Rightarrow$ A = 3

si $x$ = 0: $\quad$ 2 = A – B $\Rightarrow$ B = 1

Con esto:

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}dx = \int \frac{3}{(x-1)^2}dx + \int \frac{1}{x-1}dx = \frac{-3}{x-1} + \ln(x-1) + c$$