

CUESTIONARIO DE RESPUESTA MÚLTIPLE (50%)

□ La función $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq 0 \\ x - ax^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es

derivable en toda la recta real:

- a) Para cualquier valor de a .
 b) Sólo si $a = -1$
 c) Ninguna de las anteriores.
- El área encerrada entre las gráficas de la recta $y = x + 2$ y la parábola $y = x^2$, vale:
- a) $\frac{7}{4} u^2$ (unidades cuadradas) b) $\frac{11}{4} u^2$
 c) Ninguna de las anteriores, su valor es:
- La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$, en el punto P de la curva de abscisa $x = 3$, es:
- a) $y = -5x + 22$ b) $y = -3x + 15$
 c) Ninguna de las anteriores.
- La integral $\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2} dx$ vale:
- a) $2/3$
 b) Es divergente
 c) Ninguna de las anteriores.
- La gráfica de la función $f(x) = \frac{m}{1+x^2}$ tiene:
- a) Un mínimo relativo si $m > 0$.
 b) Dos puntos de inflexión si $m \neq 0$.
 c) Ninguna de las anteriores.
- La función $f(x) = 2 + 2x - e^x$, en el intervalo $(0, 1)$, cumple:
- a) Corta una vez al eje OX.
 b) Tiene un máximo.
 c) Ninguna de las anteriores.
- La función $f(x) = \frac{2x-2}{x^2 - px + 1}$:
- a) Es continua para todo valor de $p > 1$.
 b) Tiene una discontinuidad evitable si $p = 2$.
 c) Ninguna de las anteriores.

□ Los infinitésimos en $x = 0$, $f(x) = x \sin x$ y $g(x) = 1 - \cos x$ son:

- a) Equivalentes.
 b) Del mismo orden
 c) Ninguna de las anteriores.
- La función $f(x) = xe^x$ es cóncava (\cap) en el intervalo:
- a) $(-\infty, -2)$
 b) $(-\infty, 2]$
 c) $[2, +\infty)$
- La función $f(x) = x^5 - 5x^3$ tiene:
- a) Dos máximos relativos.
 b) Tres puntos de inflexión.
 c) Ninguna de las anteriores.

PROBLEMAS:

1. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x-1}$

- a) Indica su dominio, los puntos de corte con los ejes y sus asíntotas. (0,7 p).
 b) Estudia su crecimiento y decrecimiento (0,5 p)
 c) Sus máximos y mínimos; así como su concavidad y convexidad. (0,4 p)
 d) Haz su representación gráfica. (0,4 p)

2. Calcula el polinomio de Taylor, de grado 3, de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x-1)$, en el punto $x = 1$. Utiliza el polinomio hallado para calcular aproximadamente $\operatorname{sen} 0,2$. ¿Puede asegurarse que el error cometido es menor que $1/(24 \cdot 5^4)$? ((1 punto)

3. Calcula las siguientes integrales:

- a) $\int \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{2x^4} dx$ (0,3 p)
 b) $\int xe^{2x} dx$ (0,7 p)
 c) $\int (\operatorname{sen} 2x - \operatorname{cos} 3x) dx$ (0,3 p)
 d) $\int \frac{4}{x^2 + x - 2} dx$ (0,7 p)

SOLUCIONES

1. La función $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq 0 \\ x - ax^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

es derivable en toda la recta real:

- a) Para cualquier valor de a .
- b) Sólo si $a = -1$.
- c) Ninguna de las anteriores.

Sol. El único punto que presenta dificultades es $x = 0$.

- Continuidad en $x = 0$ (para que una función sea derivable es necesario que sea continua):

Si $x \rightarrow 0^-$, $f(x) = \sin x \rightarrow 0$

Si $x \rightarrow 0^+$, $f(x) = x - ax^2 \rightarrow 0$

Como los límites laterales coinciden, la función es continua para cualquier valor de a .

- Derivabilidad.

Salvo para $x = 0$, la función derivada es $f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 1 - 2ax & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Si $x \rightarrow 0^-$, $f'(x) = \cos x \rightarrow 1$

Si $x \rightarrow 0^+$, $f'(x) = 1 - 2ax \rightarrow 1$

Como las derivadas laterales coinciden, independientemente del valor de a , la función dada es derivable siempre.

2. El área encerrada entre las gráficas de la recta $y = x + 2$ y la parábola $y = x^2$, vale:

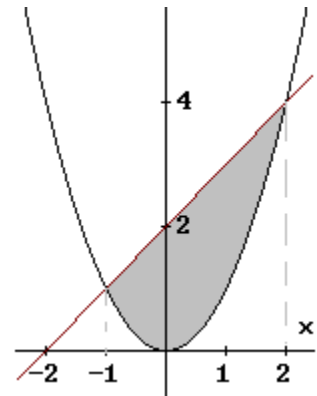
- a) $\frac{7}{4} u^2$ (unidades cuadradas)
- b) $\frac{11}{4} u^2$
- c) Ninguna de las anteriores, su valor es:

Sol. El área encerrada entre ambas curvas es la sombreada en la siguiente figura.

La parábola y la recta se cortan en los puntos las soluciones del sistema $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$, que son $(-1, 1)$ y $(2, 4)$; puntos de abscisas $x = -1$ y $x = 2$.

Por tanto, el área pedida viene dada por la integral

$$\int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{2}$$



3. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$, en el punto P de la curva de abscisa $x = 3$, es:

- a) $y = -5x + 22$
- b) $y = -3x + 15$
- c) Ninguna de las anteriores.

Sol. La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x-2) - (2x+1)}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2}$$

Se tiene: $f(3) = 7$, $f'(3) = -5$.

La recta tangente será: $y - 7 = -5(x - 3) \Rightarrow y = -5x + 22$

4. La integral $\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2} dx$ vale:

- a) $2/3$ b) Es divergente c) Ninguna de las anteriores.

Sol. La función es discontinua en $x = 0$. Por tanto:

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^3 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow 0^-} \int_{-1}^c x^{-2} dx + \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^3 x^{-2} dx =$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^-} \left. \frac{-1}{x} \right|_{-1}^c + \lim_{c \rightarrow 0^+} \left. \frac{-1}{x} \right|_c^3 = \lim_{c \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{c} - 1 \right) + \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{c} \right) = \infty + \infty = \infty$$

5. La gráfica de la función $f(x) = \frac{m}{1+x^2}$ tiene:

- a) Un mínimo relativo si $m > 0$.
 b) Dos puntos de inflexión si $m \neq 0$.
 c) Ninguna de las anteriores.

Sol. $f(x) = \frac{m}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2mx}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2m(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$

• La derivada primera se anula si $x = 0$, independientemente del valor de m .

Si $m > 0, f''(0) < 0 \rightarrow$ se tendría un máximo.

Si $m < 0, f''(0) > 0 \rightarrow$ se tendría un mínimo.

• Si $m \neq 0$, la derivada segunda se anula en $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y en $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Por tanto, hay dos puntos de inflexión.

6. La función $f(x) = 2 + 2x - e^x$, en el intervalo $(0, 1)$, cumple:

- a) Corta una vez al eje OX.
 b) Tiene un máximo.
 c) Ninguna de las anteriores.

Sol. $f(x) = 2 + 2x - e^x \Rightarrow f'(x) = 2 - e^x \Rightarrow f''(x) = -e^x$

La derivada primera se anula si $x = \ln 2 \in (0, 1)$. Como $f''(\ln 2) < 0$, la función tendrá un máximo en $x = \ln 2$.

7. La función $f(x) = \frac{2x-2}{x^2 - px + 1}$:

- a) Es continua para todo valor de $p > 1$.
 b) Tiene una discontinuidad evitable si $p = 2$.
 c) Ninguna de las anteriores.

Sol. Es discontinua en los ceros del denominador: $x^2 - px + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4}}{2}$

Por tanto, si $p > 2$ o $p < -2$, la función tiene dos discontinuidades; si $p = \pm 2$, tiene una discontinuidad; en caso contrario es continua para todo x .

Para $p = 2$, la función es: $f(x) = \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 1}$, que es discontinua en $x = 1$.

Como $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{2x-2} = \infty$, la discontinuidad no puede evitarse.

8. Los infinitésimos en $x = 0$, $f(x) = x \sin x$ y $g(x) = 1 - \cos x$ son:

$$b) f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$$

Con esto:

Si $x < 1 - \sqrt{3}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crece.

Si $1 - \sqrt{3} < x < 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrece.

Si $1 < x < 1 + \sqrt{3}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrece.

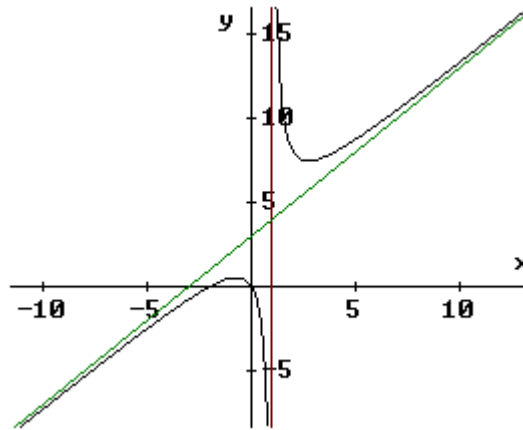
Si $x > 1 + \sqrt{3}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crece.

$$c) f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3}, \text{ que no se anula en ningún punto de su dominio.}$$

Si $x < 1$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava (\cap). En consecuencia, en $x = 1 - \sqrt{3}$ hay máximo.

Si $x > 1$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es convexa (\cup). En consecuencia, en $x = 1 + \sqrt{3}$ hay mínimo.

d) La gráfica es:



2. Calcula el polinomio de Taylor, de grado 3, de la función $f(x) = \text{sen}(x-1)$, en el punto $x = 1$.

Utiliza el polinomio hallado para calcular aproximadamente $\text{sen } 0,2$. ¿Puede asegurarse que el error cometido es menor que $1/(24 \cdot 5^4)$? (1 punto)

Sol.

$$f(x) = \text{sen}(x-1) \Rightarrow f(1) = 0$$

$$f'(x) = \cos(x-1) \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\text{sen}(x-1) \Rightarrow f''(1) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos(x-1) \Rightarrow f'''(1) = -1$$

$$f^{(iv)}(x) = \text{sen}(x-1) \Rightarrow f^{(iv)}(x_0) = \text{sen}(x_0 - 1)$$

$$\text{Luego: } P(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^3}{6} \quad (0,5 \text{ puntos})$$

$$\text{Por tanto: } \text{sen}(0,2) = \text{sen}(1,2-1) \approx P(1,2) = 0,2 - \frac{0,2^3}{6} = 0,198666\dots = 149/750 \quad (0,3 \text{ puntos})$$

$$\text{El error exacto es } R(x) = \frac{\text{sen}(x_0-1)}{4!} (x-1)^4 < (\text{para } x = 1,2) < \frac{1}{24} (1,2-1)^4 = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{5^4} \quad (0,2 \text{ puntos})$$

3. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{2x^4} dx$ (0,3 p)

b) $\int xe^{2x} dx$ (0,7 p)

c) $\int (\sin 2x - \cos 3x) dx$ (0,3 p)

d) $\int \frac{4}{x^2 + x - 2} dx$ (0,7 p)

Sol.

a) $\int \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{2x^4} dx =$

$$\int \left(\frac{1}{2x} + \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{2x^4} \right) dx = \int \left(\frac{1}{2x} + \frac{3}{2}x^{-2} - \frac{1}{2}x^{-4} \right) dx = \frac{1}{2} \ln x - \frac{3}{2x} + \frac{1}{6x^3} + c$$

b) Tomando: $u = x \Rightarrow du = dx$

$$e^{2x} dx = dv \Rightarrow \int e^{2x} dx = \int dv \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

Luego: $\int xe^{2x} dx = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$

c) $\int (\sin 2x - \cos 3x) dx = -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{3} \sin 3x + c$

d) La primitiva de la función se halla por descomposición en fracciones simples.

$$\frac{4}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+2)}{(x+2)(x-1)} \Rightarrow 4 = A(x-1) + B(x+2)$$

Para $x = 1$: $4 = 3B \Rightarrow B = 4/3$

Para $x = -2$: $4 = -3A \Rightarrow A = -4/3$

Con esto:

$$\int \frac{4}{x^2 + x - 2} dx = \int \left(\frac{-4/3}{x+2} + \frac{4/3}{x-1} \right) dx = -\frac{4}{3} \ln(x+2) + \frac{4}{3} \ln(x-1) + c$$