

Funciones, límites y continuidad

1.- Halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{|x+1|}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3-11x^2+12x-4}{3x^2-8x+4}$

2.- Dadas las funciones $f(x) = \frac{3}{x}$ y $g(x) = \frac{x-3}{3x+1}$, halla y simplifica las expresiones de :

a) $(g \circ f)(x)$

b) $(f \circ g)(x)$

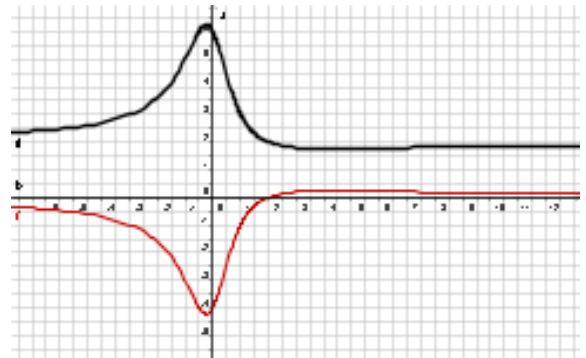
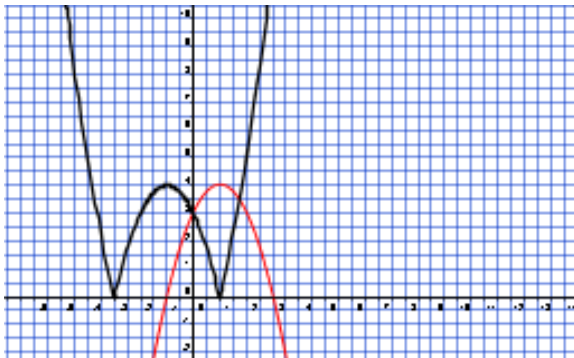
c) $g^{-1}(x)$

3.- Representa la función $y = \frac{x^2+2x-3}{x}$ a partir de su dominio, cortes con los ejes y asíntotas.

4.- Representa y da la expresión analítica (= fórmula) de la función que da la temperatura en función del tiempo, en horas, y que describe la siguiente situación :

A las 0 h, el termómetro marcaba 3°C y empezó a descender de forma uniforme de manera que a las 4 de la mañana marcaba - 2°C. Así se mantuvo hasta las 8 de la mañana, hora en la que la temperatura comenzó a ascender, también uniformemente, hasta llegar a los 4°C a las 10 de la mañana.

5.- Observa los siguientes paneles y deduce la fórmula simplificada de la función con el trazo más grueso a partir de la fórmula de la función con el trazo más fino :



SOLUCIÓN EXAMEN FUNCIONES

$$1.-a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt[3]{x+6} - 3)(\sqrt[3]{x+6} + 3)}{(x-3)(\sqrt[3]{x+6} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6-9}{(x-3)(\sqrt[3]{x+6} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+6} + 3)} = \frac{1}{\sqrt[3]{3+6} + 3} = \frac{1}{6}$$

b) $\frac{(-1)^2 - (-1) + 2}{|-1+1|} = \frac{4}{0}$ Estudiamos los límites por la derecha y por la izquierda

Para $x = -1,001$, $\frac{(-1.001)^2 - (-1.001) + 2}{|-1.001+1|} = 4003.0 \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty$

Para $x = -0.999$ $\frac{(-0.999)^2 - (-0.999) + 2}{|-0.999+1|} = 3997.0 \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty$

Por lo tanto el límite existe y su valor es ∞

c) $3x^3 - 11x^2 + 12x - 4 = (x-1)(x-2)(3x-2) \quad 3x^2 - 8x + 4 = (3x-2)(x-2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 11x^2 + 12x - 4}{3x^2 - 8x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)(3x-2)}{(3x-2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1$$

2°.-

a) $(g \circ f)(x) =$

$$x \rightarrow \frac{3}{x} \rightarrow \frac{\frac{3}{x} - 3}{3 \cdot \frac{3}{x} + 1} = \frac{\frac{3-3x}{x}}{\frac{9+x}{x}} = \frac{3-3x}{9+x}$$

b) $(f \circ g)(x) =$

$$x \rightarrow \frac{x-3}{3x+1} \rightarrow \frac{3}{\frac{x-3}{3x+1}} = \frac{9x+3}{x-3}$$

c) $g^{-1}(x) = \frac{x+3}{1-3x}$

$$y = \frac{x-3}{3x+1}; 3xy + y = x-3; y+3 = x-3xy$$

$$y+3 = x(1-3y) \rightarrow \frac{y+3}{1-3y} = x$$

3.- Dominio : $\mathbb{R} - \{0\}$

Cortes eje Y : no se puede hacer $x = 0$ luego no hay

Cortes eje X; si $x = 0$, $x^2 + 2x - 3 = 0$, $\{x = -3\}, \{x = 1\}$

Asintotas verticales; $x = 0$

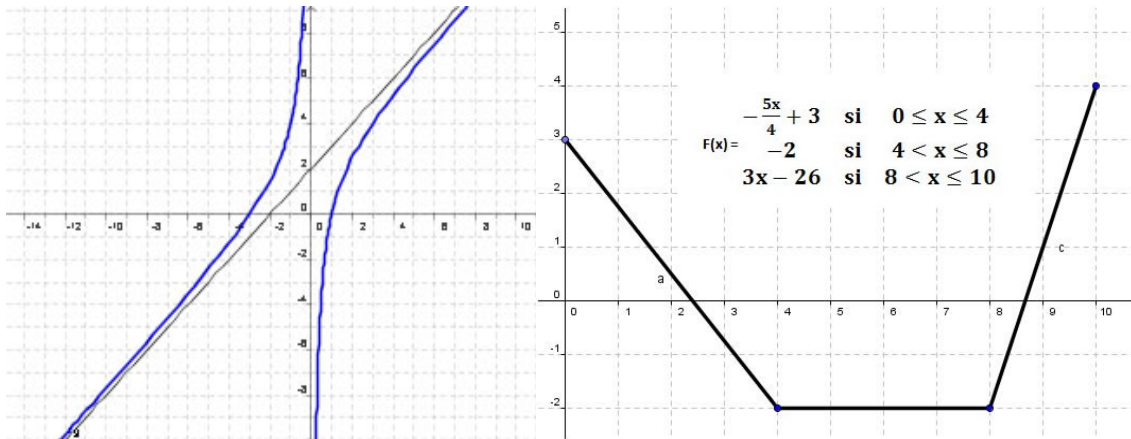
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x} = -\infty$$

Asintotas horizontales : No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x} = -\infty$$

Asintotas oblicuas: $y = x + 2$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2} = 1 \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2} - x \right) = 2$$



EJERCICIO 5

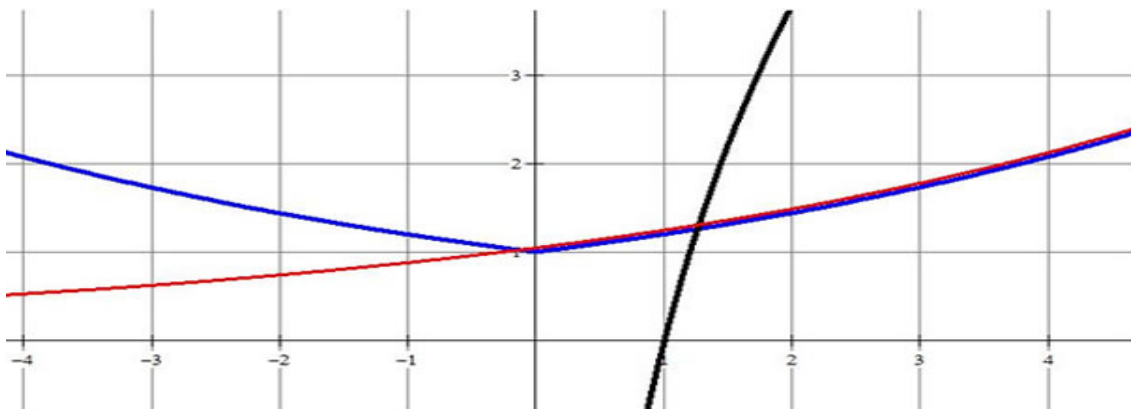
5.- $x^2 - 9 = 0$ $x = 3, -3$ $x = 0$



Si $x = -4$, $\frac{16-9}{-4} = -$ Si $x = -1$, $\frac{1-9}{-1} = +$ Si $x = 1$, $\frac{1-9}{1} = -$ Si $x = 4$, $\frac{16-9}{4} = +$

Así pues, el dominio de la función es la solución de $\frac{x^2-9}{x} \geq 0$ y es $[-3, 0) \cup [3, \infty)$

Ejercicio 6



6.-

x	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
y=1,2 ^x	1	1,2	0.83	1.44	0.69	1.73	0.58	2.07	0.48

Ejercicio 7

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -2} (6 + 3x) = \lim_{x \rightarrow -2} (ax^2 + bx) \quad 0 = 4a - 2b$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -1} (ax^2 + bx) = \lim_{x \rightarrow -1} (x + \ln x) \quad 1 = a + b$$

Resolviendo el sistema : $a = \frac{1}{3}$ $b = \frac{2}{3}$

Ejercicio 8

a) Se cambia x por $|x|$ y se desplaza la gráfica dos unidades hacia abajo

$$Y = -|x|^2 + 4|x|$$

b) Se desplaza la función 2 unidades a la derecha y tres hacia arriba :

$$Y = \frac{4(x-2)-2}{(x-2)^2+1} + 3 = \frac{3x^2-8x+5}{x^2-4x+5}$$