

TRIGONOMETRÍA 1 (Resumen)

• **Definiciones en triángulos rectángulos**

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}}$$

• **Razones de 30°, 60° y 45°**

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{tg } 45^\circ = 1$$

• **Definiciones generales (válidas para cualquier ángulo de cualquier cuadrante)**

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{r}$$

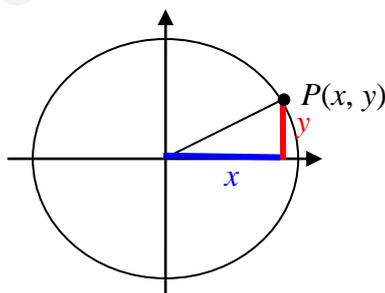
$$\text{cosec } \alpha = \frac{r}{y}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{r}{x}$$

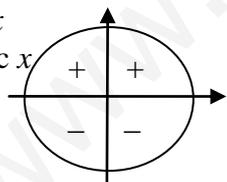
$$\text{tg } \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{x}{y}$$

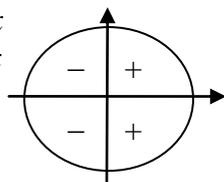


• **Signos de las razones según los cuadrantes**

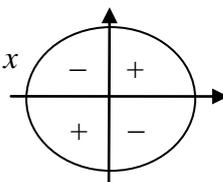
sen x
cosec x



cos x
sec x

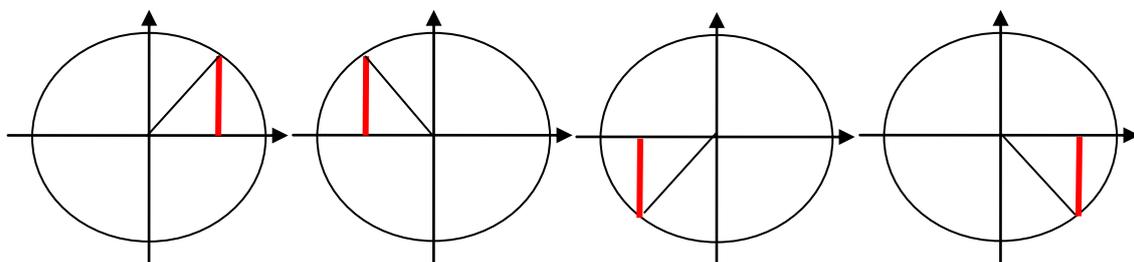


tg x
cotg x

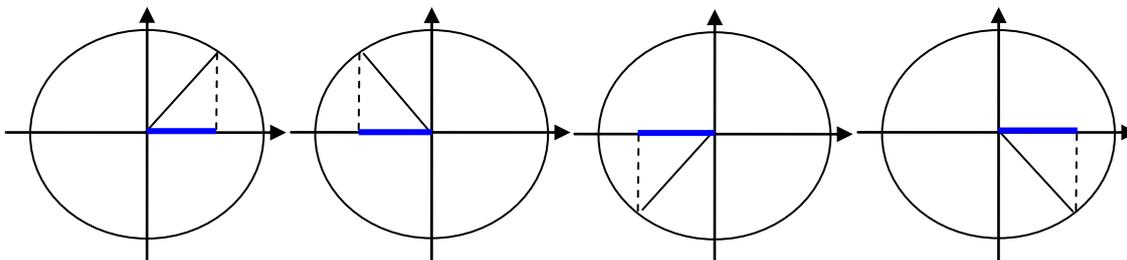


• **Las razones en la circunferencia trigonométrica (radio = 1)**

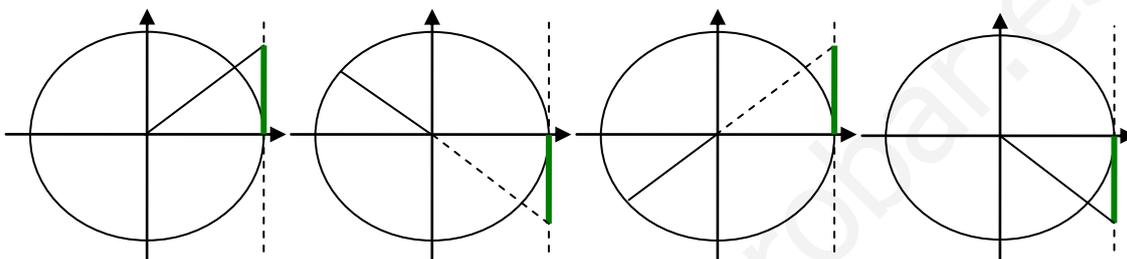
sen x



cos x



tg x



• **Recorrido**

$$-1 \leq \text{sen } x \leq 1 \quad -1 \leq \text{cos } x \leq 1 \quad -\infty < \text{tg } x < +\infty, \quad \forall x$$

• **Situar un ángulo en la circunferencia**

- Si el ángulo es mayor de 360°, lo dividimos entre 360 (sin eliminar ceros en dividiendo y divisor, si se pudiera) y coincide con la posición del resto de la división sobre la circunferencia. Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 2100 \overline{) 360} \\ \underline{300 } \\ 300 \end{array} \Rightarrow 2100 = 5 \cdot 360 + 300 \text{ (5 vueltas completas + } 300^\circ) \Rightarrow \Rightarrow 2100^\circ \text{ y } 300^\circ \text{ coinciden sobre la circunferencia.}$$

- Si el ángulo es negativo y menor de -360°, dividimos entre 360 su valor absoluto, como antes. El ángulo coincide con el resto negativo. Sumándole 360° se convierte en un ángulo entre 0° y 360°. Ejemplo: Tomemos -2100°; se tiene:

$$\begin{array}{r} 2100 \overline{) 360} \\ \underline{300 } \\ 300 \end{array} \Rightarrow -2100^\circ \text{ y } -300^\circ \text{ coinciden sobre la circunferencia.}$$

Pero -300° coincide sobre la circunferencia con -300° + 360° = 60°. Por tanto, -2100° coincide con 60°.

• **Fórmulas fundamentales**

1) $\cotg \alpha = \frac{1}{\tg \alpha}$

2) $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$

3) $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sen \alpha}$

4) $\sen^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

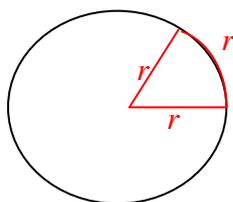
5) $\tg \alpha = \frac{\sen \alpha}{\cos \alpha}$

6) $\cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sen \alpha}$

7) $1 + \tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

8) $1 + \cotg^2 \alpha = \frac{1}{\sen^2 \alpha}$

• **El radián**



El *radián* es una medida de ángulos. Un ángulo mide 1 radián (y se denota como 1 rad) si delimita un arco de circunferencia cuya longitud coincide con el radio.

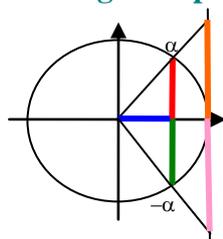
Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, dicha longitud (el arco que delimita) es 2π veces mayor que el radio. Por tanto, un ángulo de 360° es 2π veces mayor que aquél que mide 1 rad. Luego 360° equivale a 2π rad. Y por ello, 180° equivale a π rad. Así, una regla de 3 permite pasar de grados a radianes, o al revés:

Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, dicha longitud (el arco que delimita) es 2π veces mayor que el radio. Por tanto, un ángulo de 360° es 2π veces mayor que aquél que mide 1 rad. Luego 360° equivale a 2π rad. Y por ello, 180° equivale a π rad. Así, una regla de 3 permite pasar de grados a radianes, o al revés:

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{\text{Ángulo en grados}}{\text{Ángulo en rad}}$$

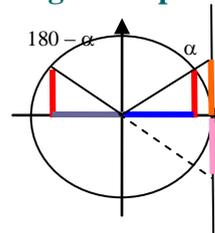
• **Relaciones entre razones de distintos ángulos**

Ángulos opuestos: α y $-\alpha$



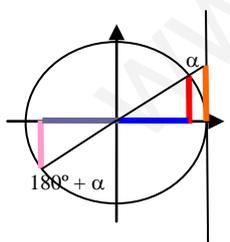
$$\begin{aligned} \sen(-\alpha) &= -\sen \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \tg(-\alpha) &= -\tg \alpha \end{aligned}$$

Ángulos suplementarios: α y $180^\circ - \alpha$



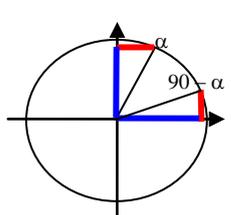
$$\begin{aligned} \sen(180^\circ - \alpha) &= \sen \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tg(180^\circ - \alpha) &= -\tg \alpha \end{aligned}$$

Áng. que difieren en 180° : α y $180^\circ + \alpha$



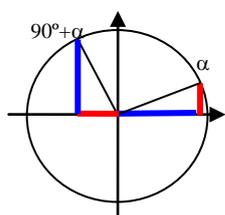
$$\begin{aligned} \sen(180^\circ + \alpha) &= -\sen \alpha \\ \cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tg(180^\circ + \alpha) &= \tg \alpha \end{aligned}$$

Ángulos complementarios: α y $90^\circ - \alpha$



$$\begin{aligned} \sen(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sen \alpha \\ \tg(90^\circ - \alpha) &= \cotg \alpha \end{aligned}$$

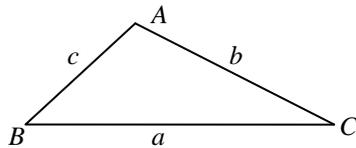
Áng. que difieren en 90° : α y $\alpha + 90^\circ$



$$\begin{aligned} \sen(90^\circ + \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(90^\circ + \alpha) &= -\sen \alpha \\ \tg(90^\circ + \alpha) &= -\cotg \alpha \end{aligned}$$

- Resolución de triángulos no rectángulos

Teorema de los senos

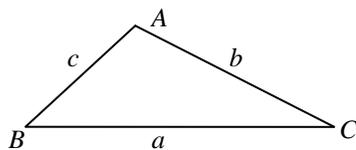


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Observaciones relativas al Teorema de los senos:

- 1) Sirve para resolver un triángulo conocidos dos ángulos y un lado o dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- 2) Cuando se calcula un ángulo hay, en principio, dos soluciones: α y $180^\circ - \alpha$. Hay que comprobar si ambas son válidas: La suma de los tres ángulos no puede superar 180° , y un triángulo tiene, a lo sumo, un solo ángulo obtuso.
- 3) Si en un problema determinado, para calcular un ángulo, podemos optar por aplicar el Teorema de los senos o el Teorema del coseno, hay que elegir siempre el del coseno (porque el de los senos puede aportar dos soluciones falsamente válidas en estos casos).

Teorema del coseno



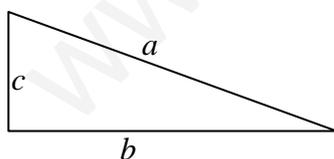
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

Observaciones relativas al Teorema del coseno:

- 1) Sirve para resolver un triángulo conocidos los tres lados o dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
- 2) Si en un problema determinado, para calcular un ángulo, podemos optar por aplicar el Teorema de los senos o el Teorema del coseno, hay que elegir siempre el del coseno (porque el de los senos puede aportar dos soluciones falsamente válidas en estos casos).

- Otras fórmulas útiles

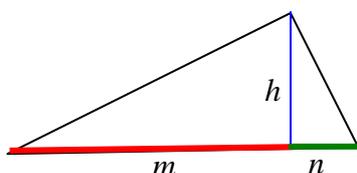
Teorema de Pitágoras



Sólo en triángulos rectángulos:

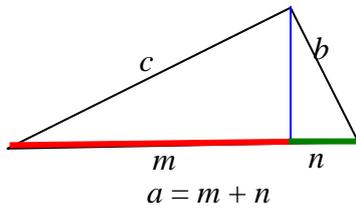
$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (a \text{ es la hipotenusa})$$

Teorema de la altura



Sólo en triángulos rectángulos:

$$h^2 = m \cdot n \quad (a = m + n \text{ es la hipotenusa})$$

Teorema del cateto

Sólo en triángulos rectángulos:
 $c^2 = m \cdot a$ (a es la hipotenusa)
 $b^2 = n \cdot a$

$$a = m + n$$

Fórmula de Herón

Calcula el área de un triángulo cualquiera conocidos sus tres lados. Si llamamos p al *semiperímetro* del triángulo, esto es: $p = \frac{a+b+c}{2}$, se tiene:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Área de un triángulo

$$S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

Longitud de la circunferencia

$$l = 2\pi r$$

Área del círculo

$$S = \pi r^2$$

TRIGONOMETRÍA 2 (Resumen)**• Razones de la suma de dos ángulos**

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{cos}(a+b) = \operatorname{cos} a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

• Razones de la diferencia de dos ángulos

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{cos}(a-b) = \operatorname{cos} a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

• Razones del ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$$

$$\operatorname{cos} 2a = \operatorname{cos}^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

• Razones del ángulo mitad

$$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} a}{2}}$$

$$\operatorname{cos} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} a}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} a}{1 + \operatorname{cos} a}}$$

El signo (+ ó -) se decide según el cuadrante en el que se encuentre $a/2$.

Si se está demostrando una identidad (válida para cualquier a) o se está resolviendo una ecuación, hay que trabajar con ambos signos a la vez (\pm).

• Transformación de sumas en productos

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{cos} \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{cos} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{cos} A + \operatorname{cos} B = 2 \operatorname{cos} \frac{A+B}{2} \operatorname{cos} \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{cos} A - \operatorname{cos} B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

• Demostrar identidades

Para demostrar que una igualdad es cierta para cualquier ángulo, hay que utilizar las fórmulas conocidas y seguir una de las siguientes estrategias:

- 1) Desarrollar uno de los miembros hasta conseguir llegar al otro. Normalmente se hace con el que es más grande.
- 2) Desarrollar ambos miembros hasta conseguir la misma expresión.

3) Cambiar la igualdad por otra equivalente más sencilla o que se sepa, ya, que es cierta. Se hace despejando o utilizando fórmulas conocidas.

- **Resolver ecuaciones trigonométricas**

Una ecuación hay que transformarla en otra consistente en una sola expresión trigonométrica de un único ángulo igual a un número. De ahí se deduce el valor del ángulo.

Para ello, si hay más de ángulo ($x, 2x, 3x, \dots$), hay que utilizar las fórmulas trigonométricas para conseguir en todas el mismo ángulo; y si hay más de una razón trigonométrica, hay que hacer lo propio para conseguir una única razón.

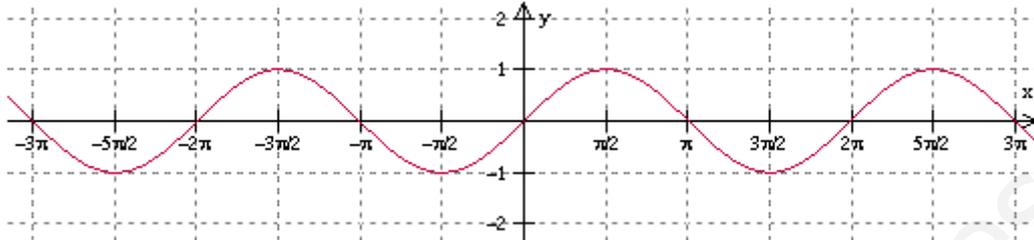
Habitualmente, tienen infinitas soluciones: todas las que se encuentren en la primera vuelta a la circunferencia, más o menos vueltas completas ($+360^\circ k$ ó $+2\pi k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, según trabajemos en grados o radianes).

TRIGONOMETRÍA 3 – FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS (Resumen)

• Funciones trigonométricas

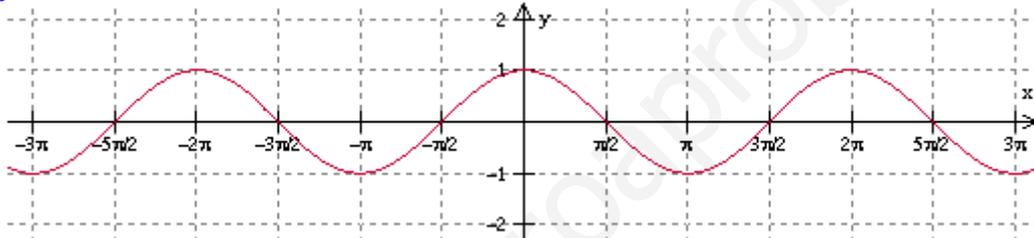
Trabajan exclusivamente en radianes (jamás en grados).

• $y = \text{sen } x$



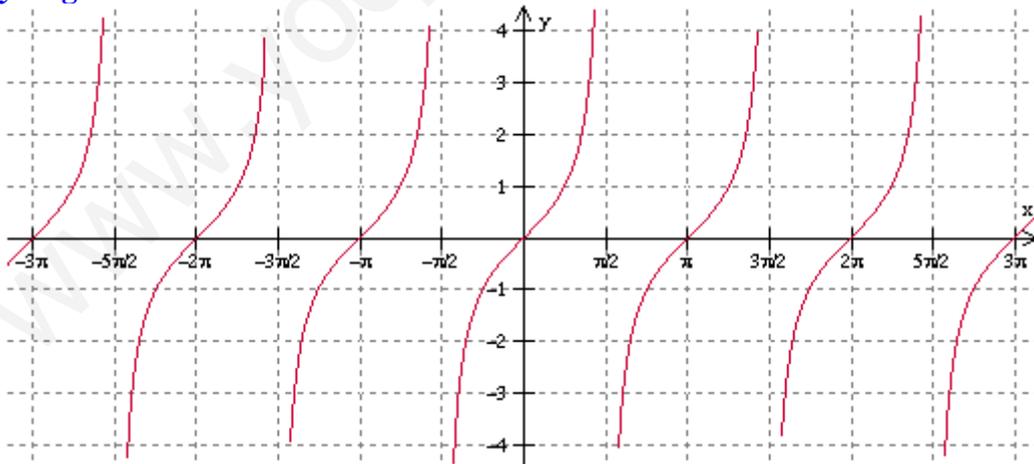
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
 - $\text{Rec}(f) = [-1, 1]$
 - Período principal: 2π
- Impar
 - No tiene asíntotas
 - $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} \text{sen } x$

• $y = \text{cos } x$



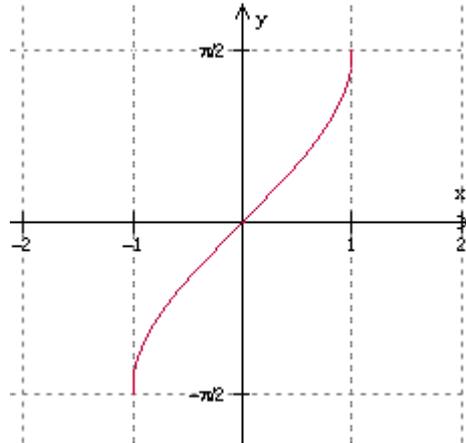
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
 - $\text{Rec}(f) = [-1, 1]$
 - Período principal: 2π
- Par
 - No tiene asíntotas
 - $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} \text{cos } x$

• $y = \text{tg } x$



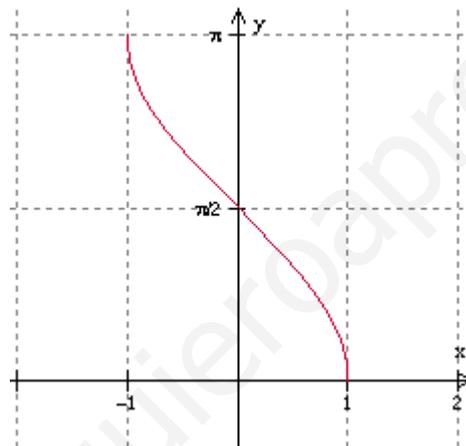
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / x = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
 - $\text{Rec}(f) = (-\infty, \infty)$
 - Período principal: π
 - Impar
- Tiene asíntotas verticales: todas las rectas de la forma $x = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 - $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} \text{tg } x$

• $y = \arcsen x$



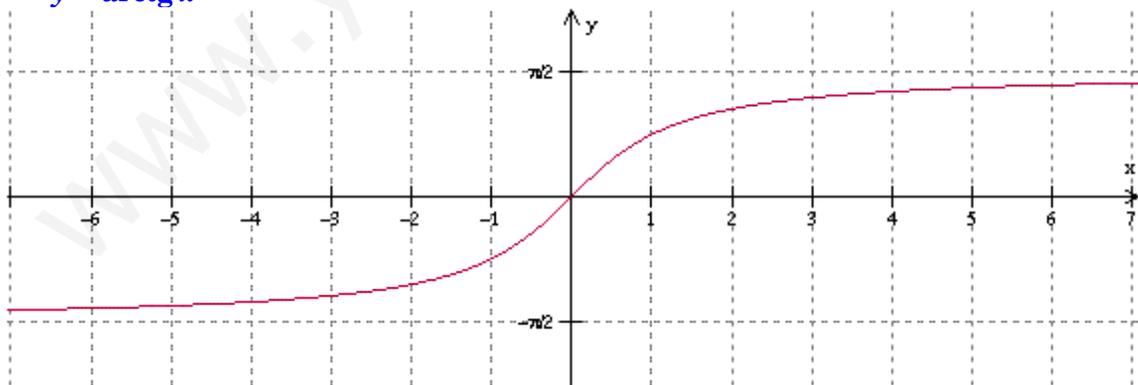
- $\text{Dom}(f) = [-1, 1]$
- $\text{Rec}(f) = [-\pi/2, \pi/2]$
- Impar
- No es periódica

• $y = \arccos x$



- $\text{Dom}(f) = [-1, 1]$
- $\text{Rec}(f) = [0, \pi]$
- Impar
- No es periódica

• $y = \text{arctg } x$



- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $\text{Rec}(f) = [-\pi/2, \pi/2]$
- Impar
- No es periódica
- Tiene dos asíntotas horizontales: $y = -\pi/2$; $y = \pi/2$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{tg } x = -\frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{tg } x = \frac{\pi}{2}$