

PROBLEMAS RESUELTOS DE TRIGONOMETRÍA

- 1) Sabiendo que $\alpha > 90^\circ$ y que $\operatorname{tg} \alpha = 1/3$, calcular el resto de razones trigonométricas de α sin usar la calculadora. Posteriormente, decir el valor de α en grados, minutos y segundos, ayudándose de la calculadora.

Si $\alpha > 90^\circ$ y $\operatorname{tg} \alpha > 0 \Rightarrow \alpha$ está en el tercer cuadrante. Pues bien:

$$\text{Como } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{10}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \text{ donde el signo } - \text{ se}$$

debe a que estamos en el tercer cuadrante.

$$\text{Por otra parte, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{-\frac{3}{\sqrt{10}}} \Rightarrow$$

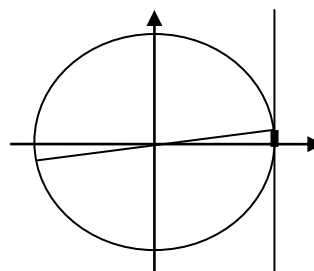
$$\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Las otras tres razones son:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{10}}} = -\sqrt{10}$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{\sqrt{10}}} = -\frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$



Por último, como $\operatorname{tg} \alpha = 1/3$, con la calculadora obtenemos que: $\alpha = 18,43^\circ$.

Trasladándolo al tercer cuadrante: $\alpha = 180^\circ + 18,43^\circ = 198,43^\circ = 198^\circ 26' 5,8''$ (Ver figura).

- 2) Empleando las fórmulas que relacionan las distintas razones trigonométricas entre si, y sin usar calculadora, hallar las restantes razones de α , sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = -5/3$, $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Después, decir el valor de α con ayuda de la calculadora.

$$\alpha \text{ es del segundo cuadrante. } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{25}{9} = \frac{34}{9} \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{34}}. \text{ Por otra parte: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = -\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} =$$

$$\boxed{\frac{5}{\sqrt{34}}}. \text{ Por tanto: } \boxed{\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{3}{5}, \operatorname{sec} \alpha = -\frac{\sqrt{34}}{3}, \operatorname{cosec} \alpha = \frac{\sqrt{34}}{5}}.$$

Con la calculadora, usando que $\operatorname{tg} \alpha = -5/3$, obtenemos que $\alpha = -59,03^\circ$. Pero tratándose de un ángulo del segundo cuadrante, el verdadero valor es $180^\circ - 59,03^\circ$:

$$\boxed{\alpha = 120,97^\circ}.$$

- 3) Conociendo que $\cos \alpha = 1/3$ y que α está en el cuarto cuadrante, hallar, sin usar calculadora, el resto de las razones trigonométricas de dicho ángulo. Posteriormente, con ayuda de la calculadora, decir cuánto vale el ángulo.

$$\text{Como } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \boxed{\text{sen } \alpha} = -\sqrt{\frac{8}{9}}$$

$$= -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ donde el signo negativo es por ser del cuarto cuadrante.}$$

$$\text{Por tanto, } \boxed{\text{tg } \alpha} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \boxed{-2\sqrt{2}}.$$

$$\text{Con lo que: } \boxed{\text{cotg } \alpha} = \frac{1}{-2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4}}; \quad \boxed{\text{sec } \alpha} = \frac{1}{1/3} = \boxed{3};$$

$$\boxed{\text{cosec } \alpha} = \frac{1}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{-\frac{3\sqrt{2}}{4}}$$

Como $\cos \alpha = 1/3 \Rightarrow \alpha = 70,53^\circ$. Pero considerando que es del 4º cuadrante, el resultado real es: $\boxed{\alpha} = 360^\circ - 70,53^\circ = \boxed{289,47^\circ = 289^\circ 28' 16''}$.

- 4) Empleando las fórmulas que relacionan las distintas razones trigonométricas entre sí, y sin usar calculadora, hallar las restantes razones de α , sabiendo que $\text{tg } \alpha = -3/4$, $270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$. Después, decir el valor de α con ayuda de la calculadora.

α es del cuarto cuadrante \Rightarrow

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \boxed{\text{cos } \alpha} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Por otra parte: } \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} \Rightarrow \boxed{\text{sen } \alpha} = \text{tg } \alpha \text{ cos } \alpha = -\frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 5} = \boxed{-\frac{3}{5}}.$$

$$\text{Por tanto: } \boxed{\text{cotg } \alpha = -\frac{4}{3}, \text{ sec } \alpha = \frac{5}{4}, \text{ cosec } \alpha = -\frac{5}{3}}.$$

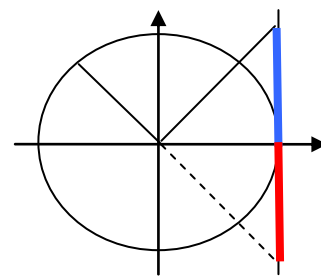
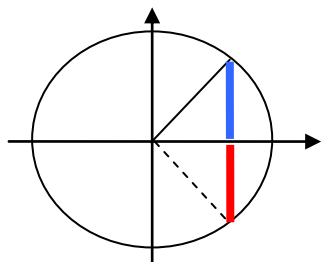
Con la calculadora, usando que $\text{tg } \alpha = -3/4$, obtenemos que:

$$\alpha = -36,87^\circ = -36,87^\circ + 360^\circ = 323,13^\circ = \boxed{323^\circ 7' 48,4''}.$$

- 5) Sin usar la calculadora, decir el valor de: a) $\text{tg } 1920^\circ$; b) $\text{sen } (-765^\circ)$.

Dividiendo 1920 entre 360 se obtiene 5 de cociente y 120 de resto. Es decir: $1920^\circ = 360^\circ \cdot 5 + 120^\circ$. Luego 1920° coincide, sobre la circunferencia, con 120° , después de dar 5 vueltas. Por tanto, $\text{tg } 1920^\circ = \text{tg } 120^\circ$.

Además $\text{tg } 1920^\circ = \text{tg } 120^\circ = \text{tg } (180 - 60^\circ) = -\text{tg } 60^\circ = -\sqrt{3}$



De la misma forma, $765 = 360 \cdot 2 + 45^\circ \Rightarrow -765^\circ$ coincide con -45° , después de dos vueltas en sentido negativo. Y

además, por tratarse de un ángulo del 4º cuadrante: $\text{sen}(-765^\circ) = \text{sen}(-45^\circ) = -\text{sen}(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

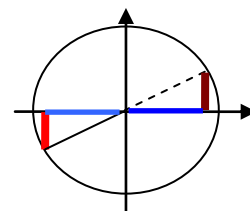
- 6) a) Calcular $\cos 105^\circ$ sin utilizar la calculadora, expresando 105° en función de otros ángulos cuyas razones trigonométricas sean conocidas.

$$\boxed{\cos 105^\circ} = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \text{sen } 60^\circ \text{sen } 45^\circ = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

- b) Sin usar la calculadora, hallar $\cos 2370^\circ$.

Dividiendo 2370° entre 360° , se tiene que $2370^\circ = 6 \cdot 360^\circ + 210^\circ$. Es decir, que tras 6 vueltas completas, 2370° se sitúa en el mismo lugar de la circunferencia que 210° . Razonando sobre la circunferencia trigonométrica, tendremos, por tanto:

$$\begin{aligned} \cos 2370^\circ &= \cos 210^\circ = -\cos(210^\circ - 180^\circ) = \\ &= -\cos 30^\circ = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$



- 7) Demostrar la siguiente identidad: $\frac{\text{cosec } \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} = \text{sen } \alpha$

Usando que $\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$ y que $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha}$, tenemos:

$$\frac{\text{cosec } \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{\text{sen } \alpha} \cdot \frac{\text{sen}^2 \alpha}{1} = \text{sen } \alpha$$

- 8) Demostrar que $2 \text{tg } x \cos^2 \frac{x}{2} - \text{sen } x = \text{tg } x$

$$\begin{aligned} 2 \text{tg } x \cos^2 \frac{x}{2} - \text{sen } x &= 2 \text{tg } x \frac{1 + \cos x}{2} - \text{sen } x = \text{tg } x (1 + \cos x) - \text{sen } x = \\ &= \text{tg } x + \text{tg } x \cos x - \text{sen } x = \text{tg } x + \frac{\text{sen } x}{\cos x} \cos x - \text{sen } x = \text{tg } x + \text{sen } x - \text{sen } x = \text{tg } x \end{aligned}$$

- 9) Demostrar que $\text{tg}(45^\circ + x) - \text{tg}(45^\circ - x) = 2 \text{tg } 2x$

$$\begin{aligned} \boxed{\text{tg}(45^\circ + x) - \text{tg}(45^\circ - x)} &= \frac{\text{tg } 45^\circ + \text{tg } x}{1 - \text{tg } 45^\circ \text{tg } x} - \frac{\text{tg } 45^\circ - \text{tg } x}{1 + \text{tg } 45^\circ \text{tg } x} = \frac{1 + \text{tg } x}{1 - \text{tg } x} - \frac{1 - \text{tg } x}{1 + \text{tg } x} = \\ &= \frac{(1 + \text{tg } x)^2 - (1 - \text{tg } x)^2}{(1 - \text{tg } x)(1 + \text{tg } x)} = \frac{1 + 2\text{tg } x + \text{tg}^2 x - (1 - 2\text{tg } x + \text{tg}^2 x)}{1^2 - \text{tg}^2 x} = \\ &= \frac{1 + 2\text{tg } x + \text{tg}^2 x - 1 + 2\text{tg } x - \text{tg}^2 x}{1 - \text{tg}^2 x} = \frac{4\text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} = 2 \cdot \frac{2\text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} = \boxed{2 \text{tg } 2x} \end{aligned}$$

10) Demostrar que $2 \operatorname{tg} a \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} + \operatorname{sen} a = \operatorname{tg} a$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{tg} a \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} + \operatorname{sen} a &= 2 \operatorname{tg} a \left(\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \right)^2 + \operatorname{sen} a = 2 \operatorname{tg} a \frac{1-\cos a}{2} + \operatorname{sen} a = \\ &= \operatorname{tg} a (1-\cos a) + \operatorname{sen} a = \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} a \cos a + \operatorname{sen} a = \operatorname{tg} a - \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \cos a + \operatorname{sen} a = \\ &= \operatorname{tg} a - \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} a = \operatorname{tg} a \end{aligned}$$

11) Demostrar que $\frac{\operatorname{tg} x \operatorname{cosec}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{cotg} x$

$$\frac{\operatorname{tg} x \operatorname{cosec}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{1}{\cos x \operatorname{sen} x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x}{\cos x \operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x$$

12) Demostrar que $\cos x + \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x = \sec x$

$$\begin{aligned} \boxed{\cos x + \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x} &= \cos x + \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \cos x + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \\ &= \frac{1}{\cos x} = \boxed{\sec x} \end{aligned}$$

13) Resolver la ecuación $\operatorname{sen} 2x = \cos x$

$$\operatorname{sen} 2x = \cos x \Rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x = \cos x \Rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow (\cos x)(2 \operatorname{sen} x - 1) = 0 \Rightarrow$$

Como un producto vale cero si, y sólo si alguno de los factores es cero, se tienen dos posibilidades:

a) $\cos x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 90^\circ + 360^\circ k \text{ ó } x = 270^\circ + 360^\circ k}$ (que pueden escribirse en una sola fórmula como $\boxed{x = 90^\circ + 180^\circ k}$), $\forall k \in \mathbb{Z}$.

b) $2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \text{ ó} \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}}$
 $\forall k \in \mathbb{Z}$.

14) Resolver la ecuación $\cos 2x + 5 \cos^2 x = 6$

$$\begin{aligned} \cos 2x + 5 \cos^2 x = 6 &\Rightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 5 \cos^2 x = 6 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 6 \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 6 \\ &\Rightarrow 7 \cos^2 x - 1 = 6 \Rightarrow 7 \cos^2 x = 7 \Rightarrow \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm 1. \end{aligned}$$

En consecuencia:

- Si $\cos x = -1 \Rightarrow \boxed{x = 180^\circ + 360^\circ k, \forall k \in \mathbb{Z}}$
- Si $\cos x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0^\circ + 360^\circ k, \forall k \in \mathbb{Z}}$

15) Resolver la ecuación: $3 \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$

$$\begin{aligned} 3(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x + \cos x = 0 &\Rightarrow 3 - 3 \cos^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0 \Rightarrow \\ -2 \cos^2 x + \cos x + 3 = 0 &\Rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x - 3 = 0 \end{aligned}$$

que es una ecuación de segundo grado cuya incógnita es $\cos x$:

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{1-5}{4} = -1 \Rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ k, \forall k \in \mathbb{Z} \\ \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ que no es posible} \end{cases}$$

16) Resolver: $4 \cos 2x - 2 \sin x = 1$

$$\begin{aligned} 4 \cos 2x - 2 \sin x = 1 &\Rightarrow 4(\cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 \cos^2 x - 4 \sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0 &\Rightarrow 4(1 - \sin^2 x) - 4 \sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 - 4 \sin^2 x - 4 \sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0 &\Rightarrow -8 \sin^2 x - 2 \sin x + 3 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 8 \sin^2 x + 2 \sin x - 3 = 0 &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\sin x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 8 \cdot (-3)}}{2 \cdot 8} = \begin{cases} \frac{-2 + \sqrt{100}}{16} = 0,5 \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k & \text{ó} \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \frac{-2 - \sqrt{100}}{16} = -0,75 \Rightarrow \begin{cases} x = 228,59^\circ + 360^\circ k & \text{ó} \\ x = 311,41^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

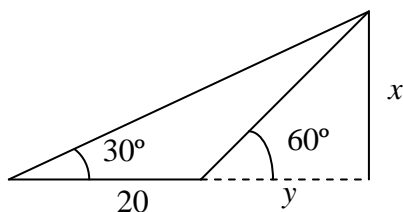
17) Resolver la ecuación: $2 \operatorname{tg} x \operatorname{sec} x - \operatorname{tg} x = 0$

$$2 \operatorname{tg} x \operatorname{sec} x - \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x (2 \operatorname{sec} x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 & \text{ó} \\ 2 \operatorname{sec} x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0^\circ + 180^\circ k, \forall k \in \mathbb{Z}}$$

$$\bullet 2 \operatorname{sec} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sec} x = 1/2 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = 2, \text{ sin solución}$$

18) El punto más alto de una elevación se ve, desde un punto del suelo, bajo un ángulo de 60° . Alejándose 20 m en línea recta con la base de dicha elevación, se ve bajo un ángulo de 30° . Averiguar la altura de la elevación.



En el triángulo rectángulo cuyos catetos son x e y , deducimos:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y \operatorname{tg} 60^\circ \quad (1)$$

En el triángulo rectángulo cuyos catetos son x y $20+y$, se tiene:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{20+y} \Rightarrow x = (20+y) \operatorname{tg} 30^\circ$$

Igualando:

$$y \operatorname{tg} 60^\circ = (20+y) \operatorname{tg} 30^\circ = 20 \operatorname{tg} 30^\circ + y \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow y \operatorname{tg} 60^\circ - y \operatorname{tg} 30^\circ = 20 \operatorname{tg} 30^\circ$$

\Rightarrow

$$\Rightarrow y(\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ) = 20 \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow y = \frac{20 \operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ} = 10$$

Sustituyendo en (1): $x = 10 \operatorname{tg} 60^\circ = 17,32 \text{ m}$

19) Resolver un triángulo, del que conocemos $a = 4 \text{ m}$, $b = 7 \text{ m}$ y $A = 30^\circ$.

Como conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, usamos el Teorema del Seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow \operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{7 \operatorname{sen} 30^\circ}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 61,04^\circ \text{ ó } B = 180^\circ - 61,04^\circ = 118,96^\circ.$$

- Si $B = 61,04^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - 61,04^\circ - 30^\circ = 88,96^\circ$. Y además:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{4 \sin 88,96^\circ}{\sin 30^\circ} = 8,00 \text{ m}$$

- Si $B = 118,96^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - 118,96^\circ - 30^\circ = 31,04^\circ$. De modo que:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{4 \sin 31,04^\circ}{\sin 30^\circ} = 4,13 \text{ m}$$

20) Resolver un triángulo sabiendo que $a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ y $C = 47^\circ$ (ángulo comprendido)

Por los datos que tenemos, hemos de utilizar el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 25 + 16 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos 47^\circ \Rightarrow \boxed{c = 3,70 \text{ m}}$$

Según el T. del seno:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{5 \sin 47^\circ}{3,70} \Rightarrow A = 80,83^\circ \text{ ó } A = 180^\circ - 80,83^\circ =$$

99,17°. En principio, ambas soluciones serían válidas, porque sumadas con el ángulo C no llegan a 180° , por lo que podría existir B en ambos casos. Sin embargo, cuando un problema de este tipo se puede comenzar con el Teorema del coseno, sólo hay una solución válida. Como no tenemos forma de saber cuál de las dos es la correcta, desechamos el procedimiento y recalculamos A usando el teorema del coseno:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow 25 = 16 + 3,70^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3,70 \cdot \cos A \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{25 - 16 - 3,70^2}{-2 \cdot 4 \cdot 3,70} = \cos A \Rightarrow \boxed{A = 80,83^\circ = 80^\circ 50' 4,18''}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\boxed{B = 180^\circ - A - C = 52,17^\circ = 52^\circ 9' 55,82''}$.

21) Resolver un triángulo sabiendo que $a = 10$, $b = 22$ y $c = 17$.

Como conocemos los tres lados, empezamos aplicando el Teorema del coseno:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{22^2 + 17^2 - 10^2}{2 \cdot 22 \cdot 17} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{A = 25,87^\circ} \end{aligned}$$

Con la calculadora, las operaciones son: $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\cos^{-1}} \boxed{(} \boxed{22} \boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{17} \boxed{x^2} \boxed{-} \boxed{10} \boxed{x^2} \boxed{)} \boxed{\div} \boxed{2} \boxed{\cdot} \boxed{22} \boxed{\cdot} \boxed{17} \boxed{)} \boxed{=}$ $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{A}$, donde la última operación es guardar el resultado en la memoria A para su uso posterior.

Para no tener problemas con los dos resultados que produce el uso del Teorema del Seno, aplicamos directamente el del Coseno para el cálculo de otro de los ángulos:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{10^2 + 22^2 - 17^2}{2 \cdot 10 \cdot 22} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{C = 47,89^\circ} \end{aligned}$$

El uso de la calculadora es similar, salvo que guardamos el resultado en la memoria C .

Por último,

$$B = 180^\circ - (A + C) = \boxed{106,23^\circ}$$

Que, con calculadora, es así: $180 \boxed{-} \boxed{(} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{A} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{C} \boxed{)} \boxed{=}$.

22) Resolver un triángulo del que se conocen: $a = 4$, $c = 10$ y $A = 20^\circ$.

Por el T. de los senos:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{10 \sin 20^\circ}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 58,76^\circ \text{ ó } C = 180^\circ - 58,76^\circ = 121,23^\circ.$$

- Si $C = 58,76^\circ \Rightarrow B = 180^\circ - A - C = 101,23^\circ$. Y además:

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos B} = \sqrt{16 + 100 - 2 \cdot 4 \cdot 10 \cos 101,23^\circ} = 11,47$$

- Si $C = 121,23^\circ \Rightarrow B = 180^\circ - A - C = 38,76^\circ$. De modo que:

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos B} = \sqrt{16 + 100 - 2 \cdot 4 \cdot 10 \cos 38,76^\circ} = 7,32$$

23) Resolver un triángulo sabiendo que $a = 13$ cm y $b = 5$ cm y $C = 100^\circ$

Como tenemos dos lados y el ángulo comprendido, aplicamos el T. del Coseno, que nos proporcionará una solución única:

$$\boxed{c} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C} = \sqrt{169 + 25 - 130 \cos 100^\circ} \cong \boxed{14,72 \text{ cm}}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow 2ac \cos B = a^2 + c^2 - b^2 \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B = 19,55^\circ = 19^\circ 32' 52,2''} \Rightarrow \boxed{A} = 180^\circ - 100^\circ - B \cong \boxed{60,45^\circ = 60^\circ 27' 7,75''}$$

24) Resolver un triángulo sabiendo que $A=96^\circ$, $a=12$ m y $b=9$ m

Por el T. de los senos:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{9 \sin 96^\circ}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B = 48,24^\circ} \text{ ó } B = 180^\circ - 48,24^\circ = 131,76^\circ.$$

Pero esta segunda solución no es válida, porque $A + B > 180^\circ$, con lo que no puede completarse el triángulo.

Entonces: $\boxed{C} = 180^\circ - A - B = \boxed{35,76^\circ}$. Y además:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \boxed{c} = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{12 \sin 35,76^\circ}{\sin 96^\circ} = \boxed{7,05 \text{ m}}$$