9 Límite de funciones. Continuidad y ramas infinitas

En esta Unidad vamos a concretar, formalizar y afianzar conceptos ya presentados en unidades anteriores, y a la vez vamos a introducirnos en el campo del Análisis Matemático.

Entre los grandes matemáticos que trataron el límite de funciones y el cálculo infinitesimal, hay que mencionar a Maria Gaetana Agnesi (1718 – 1799), quien escribió el libro *Instituciones analíticas al uso de la juventud italiana* en el que explicaba una parte novedosa de las matemáticas: el cálculo analítico.

Comenzamos la Unidad con el límite de funciones, donde usaremos un concepto de límite de funciones que no es el matemáticamente riguroso, sino uno más descriptivo, aunque válido para el nivel en el que nos encontramos.

Maria Gaetana Agnesi (Wikimedia Commons)

Introducimos el límite lateral, que luego emplearemos para estudiar tanto el comportamiento de una función cerca de sus asíntotas verticales como la continuidad.

Una vez definido pasamos a calcular el límite de funciones, surgiendo como caso importante la indeterminación $\frac{0}{0}$, ya que es la base de la derivada. Aprenderemos a resolverlo para el caso de cocientes de polinomios, pues para otros casos es necesario saber usar la Regla de L'Hôpital.

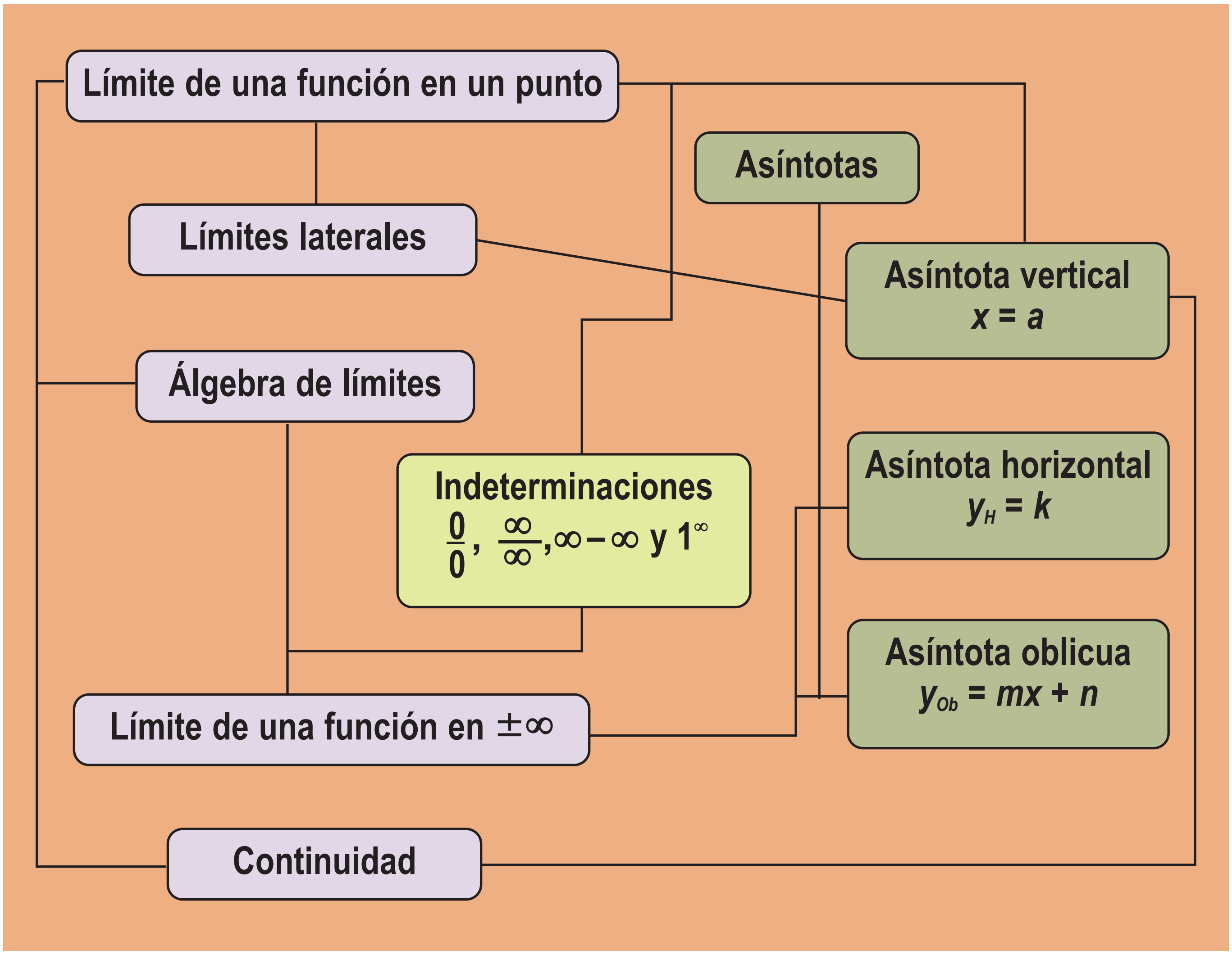
Los límites de funciones en el infinito son muy importantes. Aquí resolveremos tres de las principales indeterminaciones que aparecen en este tipo de límites: $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$ y 1^{∞}. Los dos primeros sólo para cocientes de polinomios y para radicales, y el tercero usando de nuevo el número e.

Después estudiamos las asíntotas verticales, las horizontales y las oblicuas. Las primeras se corresponden con la no acotación de la función en un punto y las dos últimas indican si la función se acerca a una recta (horizontal en el primer caso, con cualquier inclinación en el segundo) o no cuando x tiende a $\pm\infty$.

Terminamos la Unidad con un estudio de la continuidad de una función; este estudio es tanto descriptivo, usando gráficas, como analítico, introduciendo la notación y la definición usadas habitualmente.

En esta Unidad didáctica nos proponemos alcanzar los **objetivos** siguientes:

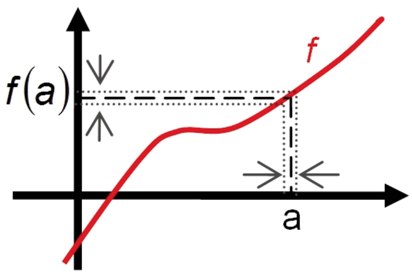
1. Conocer y entender el concepto de límite de una función en un punto y en $\pm\infty$.
2. Dominar el cálculo de límites de funciones, incluidas las indeterminaciones.
3. Conocer y entender el concepto de asíntotas de una función.
4. Dominar el cálculo de asíntotas, así como el estudio del comportamiento de la función en sus proximidades.
5. Conocer, entender y dominar el estudio de la continuidad de una función.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Límite de una función en un punto. Límites laterales

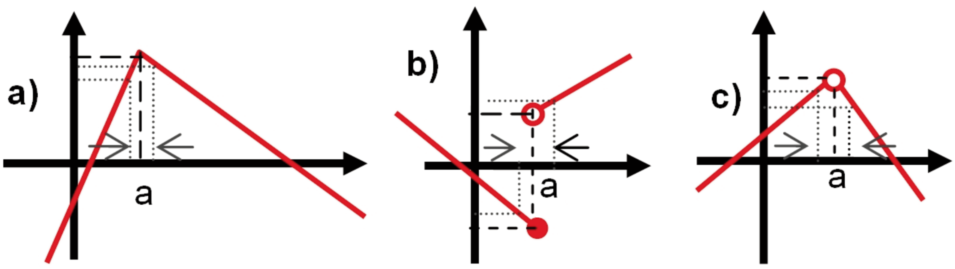
El símbolo $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ se lee **límite** de $f(x)$ cuando x tiende a a y es el valor al que se acerca f cuando x se aproxima a a. Dejamos para más adelante una definición más precisa, bastante similar a la del límite de una sucesión de la **Unidad 2**. Hay que destacar que para las funciones siempre hay que escribir debajo de la palabra límite hacia dónde tiende x. Otro hecho reseñable es que si existe el **límite de una función en un punto**, éste ha de ser único.



Si la función no presenta ningún salto en $x = a$ podemos decir que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Observa en el gráfico que a medida que damos valores a x cada vez más próximos a a (tanto por su izquierda como por su derecha), los valores de $f(x)$ estarán cada vez más próximos a $f(a)$.

¿Qué funciones pueden presentar dificultades en el cálculo de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y cuáles son dichas dificultades?

Veamos las dificultades para el caso de las funciones definidas a trozos:



- En **a)** no hay salto y, aunque las definiciones a izquierda y a derecha de a son distintas, ambas dan el mismo valor en el punto, por lo que los **límites laterales** son iguales y existe el límite en el punto:
  $$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x).$$
- En **b)** hay un salto finito. El valor que se obtiene por la izquierda es distinto del que se obtiene por la derecha, de modo que los límites laterales son distintos y no existe el límite en el punto:
  $$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to a} f(x).$$
- En **c)** la función no está definida en el punto ($\nexists\, f(a)$). No obstante, los límites laterales coinciden por lo que existe el límite en el punto: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Esto es así porque el límite es el valor al que se acerca la función cuando x tiende al punto, pero no es necesariamente el valor de la función en el punto.

¿Cómo se calculan los límites laterales? Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} 4x - 1, \text{ si } x < 0 \\ 1 + \dfrac{x^2}{4}, \text{ si } 0 \le x \le 4 \\ 9 - x, \text{ si } x > 4 \end{cases}$ y calculemos sus límites laterales en $x = 0$ y en $x = 4$.

Límite en $x = 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(4x-1) = -1$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^2}{4}\right) = 1$. Escribimos 0^- ó 0^+ cuando hablamos de la función f en general, y sólo 0 cuando sustituimos f por la fórmula con la que calcularemos el límite. Como los límites laterales son distintos $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$.

Límite en $x = 4$

$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4}\left(1+\frac{x^2}{4}\right) = 5$; $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4}(9-x) = 5$. Como los límites laterales coinciden, $\exists \lim_{x\to 4} f(x)$ y se verifica que $\lim_{x\to 4} f(x) = 5$.

En el caso de las funciones definidas como cocientes los problemas están allí donde se anula el denominador. Hay que tener cuidado con la división por cero, pues dependiendo del signo con el que se acerque el denominador a cero, la función puede ir a ∞ o a $-\infty$. Así, siempre que el denominador tienda a cero, se descompone el límite en sus límites laterales; de éstos sólo interesan los signos de numerador y denominador, para saber si tiende a ∞ ó $-\infty$:

$$\lim_{x\to -4}\frac{1-6x}{x+4} = \frac{25}{0} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to -4^-}\frac{1-6x}{x+4} = \frac{25}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to -4^+}\frac{1-6x}{x+4} = \frac{25}{0^+} = \infty \end{cases}.$$

Obviamente, igual que para las sucesiones, decir que un límite es infinito es decir que no existe tal límite, pues la función crece indefinidamente.

Podemos escribir:

- $\lim_{x\to a} k = k$, para toda constante $k \in R$: $\lim_{x\to -1} 5 = 5$.
- $\lim_{x\to a} x^n = a^n, \forall n \in R$: $\lim_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$; $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.
- $\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{f(a)}$: $\lim_{x\to -1} e^{x^2} = e^{(-1)^2} = e$.
- $\lim_{x\to a} \ln(f(x)) = \ln f(a)$: $\lim_{x\to 2}\ln(x+3) = \ln 5$.
- $\lim_{x\to a} \operatorname{sen}(f(x)) = \operatorname{sen}(f(a))$, $\lim_{x\to a}\cos(f(x)) = \cos(f(a))$, $\lim_{x\to a}\operatorname{tg}(f(x)) = \operatorname{tg}(f(a))$:

  $\lim_{x\to \pi}\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} 3\pi = 0$; $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\cos 4x = \cos\left(4\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\pi = 1$; $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

Estos tres últimos puntos pueden generalizarse usando la composición de funciones:

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x) = \lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

2. Cálculo de límites sencillos

2.1. Álgebra de límites

Pocos límites se pueden calcular con los resultados anteriores; se necesitan algunas propiedades más, que se engloban bajo el nombre de **álgebra de límites**. Las fórmulas son:

- $\lim\limits_{x\to a}(f\pm g)(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$: el límite de una suma o resta es la suma o resta de los límites.
- $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x)=\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to a}g(x)\right)$: el límite de un producto es el producto de límites.
- Cuando uno de los factores es constante: $\lim\limits_{x\to a}(k\cdot f)(x)=k\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$.
- $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$: el límite de un cociente es el cociente de límites.
- Si el numerador es constante tenemos: $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{k}{f}\right)(x)=\frac{k}{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq 0$.
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$: el límite de una función elevada a otra es igual al límite de la base elevada al límite del exponente.

Ejemplos

1. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+x)$; **b)** $\lim\limits_{x\to 2}(x^3+x+1)$; **c)** $\lim\limits_{x\to -2}(x^4-x^3+e^x)$; **d)** $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen}x-e^x)$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+x)=\lim\limits_{x\to -1}x^2+\lim\limits_{x\to -1}x=(-1)^2+(-1)=0$;

En lugar de escribir tantas veces el término límite, podemos hacerlo directamente, calculando el límite término a término y sumando los resultados:

b) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3+x+1)=2^3+2+1=11$;

c) $\lim\limits_{x\to -2}(x^4-x^3+e^x)=(-2)^4-(-2)^3+e^{-2}=24+\frac{1}{e^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen}x-e^x)=\operatorname{sen}0-e^0=-1$.

2. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(7x^2)$; **b)** $\lim\limits_{x\to -1}(x^3\cdot e^{x^2})$; **c)** $\lim\limits_{x\to 1}(7\sqrt{x}\ln(x+1))$; **d)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\cos\cdot\ln x)$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to 2}(7x^2)=7\cdot 2^2=28$; **b)** $\lim\limits_{x\to -1}(x^3\cdot e^{x^2})=(-1)^3\cdot e^{(-1)^2}=-e$;

c) $\lim\limits_{x\to 1}(7\sqrt{x}\ln(x+1))=7\cdot\sqrt{1}\cdot\ln(1+1)=7\ln 2$; **d)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\cos\cdot\ln x)=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\ln\frac{\pi}{2}=0$.

3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{e^{x-3}}{x^3}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln 4x}{\operatorname{tg} x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 7}\frac{5}{x^2}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{e^x}$; **e)** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\operatorname{tg}(x+1)}{e^{x+2}}$; **f)** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x+1}{x+2}$; **g)** $\lim\limits_{x\to 7}\frac{1-x^2}{x-7}$; **h)** $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2-16}{x^2+3x-4}$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{e^{x-3}}{x^3}=\frac{e^{3-3}}{3^3}=\frac{1}{27}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln 4x}{\operatorname{tg} x}=\frac{\ln\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\ln\pi$; **c)** $\lim\limits_{x\to 7}\frac{5}{x^2}=\frac{5}{7^2}=\frac{5}{49}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{e^x}=\frac{\cos 0}{e^0}=1$;

e) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\operatorname{tg}(x+1)}{e^{x+2}}=\frac{\operatorname{tg}(-1+1)}{e^{-1+2}}=\frac{\operatorname{tg}0}{e}=0$; **f)** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x+1}{x+2}=\frac{3(-2)+1}{-2+2}=\frac{-5}{0}\overset{\text{límites laterales}}{\Rightarrow}\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{3x+1}{x+2}=\frac{-5}{0^-}=\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+}\frac{3x+1}{x+2}=\frac{-5}{0^+}=-\infty\end{cases}\Rightarrow\nexists\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x+1}{x+2}$;

g) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{1-x^2}{7-x}=\frac{-48}{0}\overset{\text{límites laterales}}{\Rightarrow}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 7^-}\frac{1-x^2}{7-x}=\frac{-48}{0^+}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 7^+}\frac{1-x^2}{7-x}=\frac{-48}{0^-}=\infty\end{cases}\Rightarrow\nexists\lim\limits_{x\to 7}\frac{1-x^2}{7-x}$;

Cuando el denominador se acerque a cero y el numerador a un número, hemos de calcular los límites laterales.

h) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2-16}{x^2+3x-4}=\frac{(-4)^2-16}{(-4)^2+3(-4)-4}=\frac{0}{0}$ es una indeterminación, pues cualquier número sirve como cociente de esa división. La resolveremos en el apartado siguiente.

4. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x-1\right)^{x+2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}(x+4)^{\operatorname{sen} x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^{\operatorname{tg} x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to \pi}(\cos x+3)^{\cos x+1}$; **e)** $\lim\limits_{x\to -3}(x+4)^{1/(x+3)}$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x-1\right)^{x+2}=\left(1^2+1-1\right)^{1+2}=1^3=1$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}(x+4)^{\operatorname{sen} x}=4^{\operatorname{sen}0}=1$; **c)** $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^{\operatorname{tg} x}=0^{\operatorname{tg}2}=0$;

d) $\lim\limits_{x\to \pi}(\cos x+3)^{\cos x+1}=(-1+3)^{-1+1}=2^0=1$; **e)** $\lim\limits_{x\to -3}(x+4)^{1/(x+3)}=(-3+4)^{1/(-3+3)}=1^{1/0}=1^{\infty}$ es una indeterminación conocida de las sucesiones y que resolveremos con ayuda del número *e*.

2.2. Indeterminación $\frac{0}{0}$

Cuando se anulan simultáneamente numerador y denominador estamos ante una **indeterminación**, pues cualquier número sirve como resultado del cociente (cualquier número por cero siempre es cero). En este curso sólo resolveremos la indeterminación $\frac{0}{0}$ para las fracciones algebraicas y las funciones con raíces cuadradas. Para otro tipo de funciones se usa la Regla de L'Hôpital, que se estudia en Matemáticas II.

Si en una fracción algebraica se anulan numerador y denominador para un valor *a*, esto significa que son divisibles por *x* – *a*, por lo que factorizando ambos polinomios y simplificando desaparecerá la indeterminación.

Si hay un binomio con raíces cuadradas, multiplicaremos y dividiremos por su conjugado, para poder hacer la resta y así resolver la indeterminación.

Ejemplos

5. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -4}\frac{x^2-16}{x^2+3x-4}$; **b)** $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$; **c)** $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^3+8}$; **d)** $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$.

Solución :

a) $\lim_{x\to -4}\frac{x^2-16}{x^2+3x-4}=\frac{(-4)^2-16}{(-4)^2+3(-4)-4}=\frac{0}{0}\ ind \Rightarrow$ factorizamos numerador y denominador usando la Regla de Ruffini o la ecuación de segundo grado (son polinomios de segundo grado), obteniendo: $x^2-16=(x+4)(x-4)$; $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)\Rightarrow \lim_{x\to -4}\frac{x^2-16}{x^2+3x-4}=\frac{0}{0}\ ind \overset{factorizando}{=} \lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(x-4)}{(x+4)(x-1)} \overset{simplificando}{=} \lim_{x\to -4}\frac{x-4}{x-1}=\frac{-8}{-5}=\frac{8}{5}$.

b) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\frac{3^2-9}{3^2-2\cdot 3-3}=\frac{0}{0}\ ind \overset{factorizamos}{=} \lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x-3)} \overset{simplificamos}{=} \lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x+1}=\frac{3}{2}$.

c) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^3+8}=\frac{(-2)^2-(-2)-6}{(-2)^3+8}=\frac{0}{0}\ ind \overset{factorizando}{=} \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x^2-2x+4)} \overset{simplificando}{=} \lim_{x\to -2}\frac{x-3}{x^2-2x+4}=-\frac{5}{12}$.

d) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=\frac{1^2-1}{1^2-2\cdot 1+1}=\frac{0}{0}\ ind \overset{factorizando}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} \overset{simplificando}{=} \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0} \underset{laterales}{\overset{límites}{\Rightarrow}} \begin{cases}\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty\\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0^+}=\infty\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$.

6. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$; **b)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x}$; **c)** $\lim_{x\to 6}\frac{2x-12}{5-\sqrt{3x+7}}$; **d)** $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{8-x}-3}$.

Solución :

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}=\frac{2-2}{\sqrt{2+7}-3}=\frac{0}{0}\ ind \overset{conjugado:\sqrt{x+7}+3}{=} \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{x+7-9} \overset{simplificando}{=} \lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x+7}+3\right)=3+3=6$;

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x}=\frac{\sqrt{2\cdot 0+1}-1}{0}=\frac{0}{0}\ ind \overset{conjugado:\sqrt{2x+1}+1}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x+1-1}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)} \overset{simplificando}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}=\frac{2}{2}=1$;

c) $\lim_{x\to 6}\frac{2x-12}{5-\sqrt{3x+7}}=\frac{2\cdot 6-12}{5-\sqrt{3\cdot 6+7}}=\frac{0}{0}\ ind \overset{conjugado:\ 5+\sqrt{3x+7}}{=} \lim_{x\to 6}\frac{(2x-12)\left(5+\sqrt{3x+7}\right)}{25-(3x+7)} \overset{operando}{=}$

$\overset{sacando\ factor\ común}{=} \lim_{x\to 6}\frac{2(x-6)\left(5+\sqrt{3x+7}\right)}{3(6-x)} \overset{simplificando}{=} \lim_{x\to 6}\frac{-2\left(5+\sqrt{3x+7}\right)}{3}=\frac{-2\cdot 10}{3}=-\frac{20}{3}$.

d) $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{8-x}-3}=\frac{\sqrt{-1+5}-2}{\sqrt{8-(-1)}-3}=\frac{0}{0}\ ind \underset{\substack{\sqrt{x+5}+2\\ \sqrt{8-x}+3}}{\overset{conjugados:}{=}} \lim_{x\to -1}\frac{(x+5-4)\left(\sqrt{8-x}+3\right)}{(8-x-9)\left(\sqrt{x+5}+2\right)} \overset{operando}{=} \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{8-x}+3\right)}{(-x-1)\left(\sqrt{x+5}+2\right)} \overset{simplificando}{=}$

$= \lim_{x\to -1}\frac{-\left(\sqrt{8-x}+3\right)}{\sqrt{x+5}+2}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$.

7. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-5}{x+7}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, con $f(x)=\begin{cases} x-1, si\ x\neq 2 \\ 0, si\ x=2\end{cases}$; **c)** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{1-x}{x^2-25}$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-5}{x+7}=\dfrac{2\cdot 1-5}{1+7}=-\dfrac{3}{8}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1$;

c) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{1-x}{x^2-25}=\dfrac{1-(-5)}{(-5)^2-25}=\dfrac{6}{0}\underset{laterales}{\overset{límites}{\Rightarrow}}\begin{cases}\lim\limits_{x\to -5^-}\dfrac{1-x}{x^2-25}=\dfrac{6}{0^+}=\infty \\ \lim\limits_{x\to -5^+}\dfrac{1-x}{x^2-25}=\dfrac{6}{0^-}=-\infty\end{cases}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to -5}\dfrac{1-x}{x^2-25}$.

8. Calcula los siguientes límites: **a)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8x+16}{x-4}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{9}{x-5}$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8x+16}{x-4}=\dfrac{4^2-8\cdot 4+16}{4-4}=\dfrac{0}{0}ind\overset{factorizando}{=}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)^2}{x-4}\overset{simplificando}{=}\lim\limits_{x\to 4}(x-4)=0$;

b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{9}{x-5}=\dfrac{9}{0}\underset{laterales}{\overset{límites}{\Rightarrow}}\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{9}{x-5}=\dfrac{9}{0^-}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{9}{x-5}=\dfrac{9}{0^+}=\infty$.

9. Calcula los siguientes límites: **a)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6}{4x-8}$; **b)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x+3}{x^2-x-2}$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6}{4x-8}=\dfrac{6}{4\cdot 2-8}=\dfrac{6}{0}\underset{laterales}{\overset{límites}{\Rightarrow}}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{6}{4x-8}=\dfrac{6}{0^-}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{6}{4x-8}=\dfrac{6}{0^+}=\infty$;

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x+3}{x^2-x-2}=\dfrac{3(-1)+3}{(-1)^2-(-1)-2}=\dfrac{0}{0}ind\overset{factorizando}{=}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3(x+1)}{(x+1)(x-2)}\overset{simplificando}{=}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{3}{-3}=-1$.

10. Calcula los límites siguientes: **a)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{7-\sqrt{3x^2+1}}{3x-12}$; **b)** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{6-x}+x}{x^2-9}$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{7-\sqrt{3x^2+1}}{3x-12}=\dfrac{7-\sqrt{3\cdot 4^2+1}}{3\cdot 4-12}=\dfrac{0}{0}ind\overset{conjugado:\ 7+\sqrt{3x^2+1}}{=}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{49-(3x^2+1)}{(3x-12)\left(7+\sqrt{3x^2+1}\right)}\overset{factorizando}{=}$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-3(x+4)(x-4)}{3(x-4)\left(7+\sqrt{3x^2+1}\right)}\overset{simplificando}{=}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-(x+4)}{7+\sqrt{3x^2+1}}=\dfrac{-(4+4)}{7+\sqrt{3\cdot 4^2+1}}=\dfrac{-8}{14}=\dfrac{-4}{7}$;

b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{6-x}+x}{x^2-9}=\dfrac{\sqrt{6-(-3)}+(-3)}{(-3)^2-9}=\dfrac{0}{0}ind\underset{\sqrt{6-x}-x}{\overset{conjugado:}{=}}\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6-x-x^2}{(x^2-9)\left(\sqrt{6-x}-x\right)}\overset{factorizando}{=}\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-3)\left(\sqrt{6-x}-x\right)}=$

$\overset{simplificando}{=}\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-(x-2)}{(x-3)\left(\sqrt{6-x}-x\right)}=\dfrac{-(-3-2)}{(-3-3)\left(\sqrt{6-(-3)}-(-3)\right)}=\dfrac{5}{-6\cdot 6}=\dfrac{-5}{36}$.

11. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+9}-3}$; **b)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{2-\sqrt{3-x}}$.

Solución :

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+9}-3}=\frac{\sqrt{0^2+16}-4}{\sqrt{0^2+9}-3}=\frac{0}{0}ind \underset{\substack{\sqrt{x^2+16}+4\\ \sqrt{x^2+9}+3}}{\overset{conjugados:}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+16-16\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{\left(x^2+9-9\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}\overset{simplificando}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+16}+4}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

b) $$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{2-\sqrt{3-x}}=\frac{(-1)^2+(-1)}{2-\sqrt{3-(-1)}}=\frac{0}{0}ind \overset{conjugado:\,2+\sqrt{3-x}}{=}\lim_{x\to -1}\frac{\left(x^2+x\right)\left(2+\sqrt{3-x}\right)}{4-(3-x)}\overset{fctorizando}{=}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)\left(2+\sqrt{3-x}\right)}{x+1}=$$

$$\overset{simplificando}{=}\lim_{x\to -1}\left[x\left(2+\sqrt{3-x}\right)\right]=-\left(2+\sqrt{3-(-1)}\right)=-4.$$

Actividades

1. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-3x^2+4}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x-8}{\sqrt{6x+1}-5}$; **c)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}$.

2. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+9}-3}{x^2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^3-4x^2-19x-14}{x^2-49}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x^2-2x-3}{x^3-5x^2+3x+9}$.

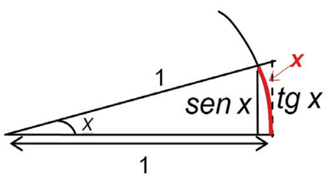
3. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4}-3}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}$.

4. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^3-6x^2+12x-8}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x^2-3}-1}$.

Para saber más...

Calculemos $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,x}{x}$. Usando el álgebra de límites obtenemos que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,x}{x}=\dfrac{0}{0}ind$. Puesto que $sen\,x$ no es un polinomio, ni podemos factorizar ni simplificar. Sin embargo podemos aprovecharnos de un resultado que, aunque no demostremos, es fácil de justificar. Dice así:

Sean $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ funciones que verifican que $h(x)<f(x)<g(x)$ en un entorno de $x=a$ y que $\lim\limits_{x\to a}h(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=l$, entonces $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=l$.



Observa que lo que se hace es acotar f entre dos funciones h y g cuyos límites son conocidos e iguales, por lo que conoceremos el límite de f. Apliquemos este hecho a nuestro problema, después de echar un vistazo al gráfico:

Se observa que $sen\,x<x<tg\,x$. Invirtiendo todos los términos se tiene que $\dfrac{1}{tg\,x}<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{sen\,x}$. Multiplicando por $sen\,x$, que es positivo en el primer cuadrante, queda $\dfrac{sen\,x}{tg\,x}<\dfrac{sen\,x}{x}<\dfrac{sen\,x}{sen\,x}\Rightarrow cos\,x<\dfrac{sen\,x}{x}<1$. Tomando límites se tiene que $\lim\limits_{x\to 0}cos\,x=\lim\limits_{x\to 0}1=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,x}{x}=1$.

Este resultado se usa para hallar la derivada del seno y el coseno, y es la justificación de la óptica geométrica, pues indica que, cuando x es suficientemente pequeño, siempre se puede hacer la aproximación $sen\,x\cong x$.

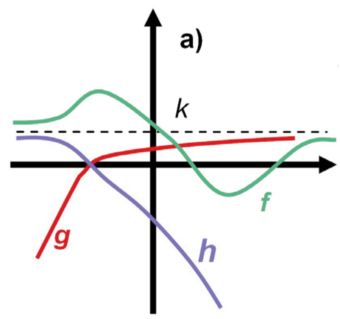
3. Límites en el infinito

3.1. Límites en el infinito de funciones básicas

En el apartado 1.2 de la **Unidad 2** tratamos el límite de una sucesión; éste sólo se puede calcular cuando $n \to \infty$, por lo que lo dicho entonces va a servirnos para calcular el $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

Para calcular el $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ debemos ser cuidadosos con el signo de x. Es habitual agrupar ambos límites y escribir $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ si ambos límites coinciden.

Gráficamente vemos los siguientes casos:



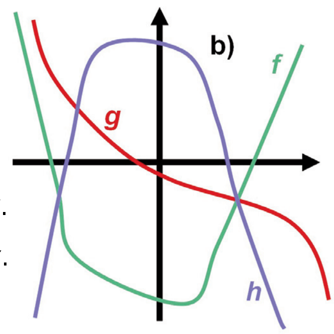
En **a)**: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k \Rightarrow f$ está acotada tanto si la variable independiente crece $(x \to \infty)$ como si disminuye $(x \to -\infty)$ y se acerca a un valor k.

$\lim_{x \to \infty} g(x) = k \Rightarrow g$ está acotada superiormente y se acerca a un valor k cuando aumenta la variable independiente.

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow g$ no está acotada inferiormente y disminuye cuando disminuye la variable independiente.

$\lim_{x \to \infty} h(x) = -\infty \Rightarrow h$ no está acotada inferiormente y disminuye cuando aumenta la variable independiente

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = k \Rightarrow h$ está acotada superiormente y se acerca a un valor k cuando disminuye la variable independiente.



En **b)**:

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty \Rightarrow f$ no está acotada superiormente y aumenta tanto si x crece como si disminuye.

$\lim_{x \to \infty} g(x) = -\infty \Rightarrow g$ no está acotada inferiormente y disminuye cuando aumenta x.

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \infty \Rightarrow g$ no está acotada superiormente y aumenta cuando disminuye x.

$\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = -\infty \Rightarrow h$ no está acotada inferiormente y disminuye tanto si x crece como si disminuye.

Las funciones periódicas proporcionan un caso más que se interpreta directamente diciendo que $\nexists \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$, pues al repetirse indefinidamente sus oscilaciones no permiten saber cuál es su comportamiento en $\pm\infty$: $\nexists \lim_{x \to \pm\infty} sen\, x$, $\nexists \lim_{x \to \pm\infty} cos\, x$, $\nexists \lim_{x \to \pm\infty} tg\, x$. Esto no es óbice para que puedan calcularse límites en los que aparezcan funciones periódicas acompañadas de otras. Hay que estudiar cada caso en particular. Lógicamente, $\nexists \lim_{x \to -\infty} \ln x$ pues los números negativos no tienen logaritmo.

Recuerda que ∞ no es un número y que no sigue las reglas que éstos deben cumplir $\infty + \infty = \infty$; $\infty \cdot \infty = \infty$; $\infty^{\infty} = \infty$. Los siguientes resultados son evidentes:

- $\lim_{x \to \pm\infty} k = k \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} 2 = 2,\ \lim_{x \to \pm\infty} (-11) = -11,\ \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3}{7} = \frac{3}{7}.$
- $\lim_{x \to \infty} x^r = \infty, r > 0 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} x = \infty,\ \lim_{x \to \infty} \sqrt{x} = \infty,\ \lim_{x \to \infty} x^5 = \infty.$
- $\lim_{x \to -\infty} x^r = (-1)^r \infty, r > 0 \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} x = -\infty,\ \lim_{x \to -\infty} x^4 = \infty,\ \lim_{x \to -\infty} x^5 = -\infty,\ \lim_{x \to -\infty} x^6 = \infty.$

  ó $\lim_{x \to -\infty} x^r = \infty$, si r es par y $\lim_{x \to -\infty} x^r = -\infty$, si r es impar.

Hay que tener cuidado con $-\infty$: obviamente $\nexists \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x}, \nexists \lim_{x\to-\infty} \sqrt[4]{x} \ldots \nexists \lim_{x\to-\infty} \sqrt[2n]{x}$, mientras que $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[5]{x} = \ldots = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[2n+1]{x} = -\infty$.

Multiplicar por una constante positiva no cambia el signo del límite, pero sí lo hace si es negativa: $\lim_{x\to\infty}(7x^3) = \infty$, $\lim_{x\to\infty}(-2x^3) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty}(7x^3) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty}(-2x^3) = -(-\infty) = \infty$.

- $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{k}{x^r} = 0, r > 0, \forall k \in R \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x^3} = 0, \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3}{x} = 0, \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0, \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{25}{x^4}\right) = 0.$
  Ya sabemos por las sucesiones que se obtiene 0 al dividir un número por ∞ ó $-\infty$. En este caso no influye el signo de la constante.
- $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty, \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0, \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty, \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty.$

Las reglas del álgebra de límites no cambian, por lo que no las repetimos. Sabemos por las sucesiones que el límite de un polinomio es igual al límite de su monomio de mayor grado (aproximación asintótica $\approx$). De este modo se simplifica **el cálculo del límite de polinomios en** $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(2x^5 - 3x^2 + 6x - 1\right) \underset{\textit{simplificando}}{\overset{\textit{factor común}}{=}} \lim_{x\to\pm\infty}\left\{2x^5\left(1 - \frac{3}{2x^3} + \frac{3}{x^4} - \frac{1}{2x^5}\right)\right\} \approx \lim_{x\to\pm\infty}\left(2x^5\right) = \pm\infty;$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(3x^4 - 1000x + 2\right) \underset{\textit{simplificando}}{\overset{\textit{factor común}}{=}} \lim_{x\to\pm\infty}\left\{3x^4\left(1 - \frac{1000}{3x^3} + \frac{2}{3x^4}\right)\right\} \approx \lim_{x\to\pm\infty}\left(3x^4\right) = \infty.$$

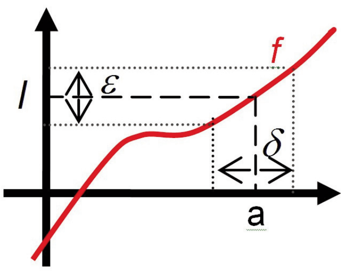
Directamente: $\lim_{x\to\pm\infty}\left(-7x^3 + 12x^2 + 600x + 3\right) \approx \lim_{x\to\pm\infty}\left(-7x^3\right) = \mp\infty.$

Para saber más...

La definición matemática de **límite de una función en** ∞ es idéntica a la del límite de una sucesión; no hay más que cambiar a_n por f, n por x y el conjunto N por R:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists x_0 \in R, x_0 > 0$, tal que si $x > x_0$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists x_0 \in R, x_0 < 0$, tal que si $x < x_0$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.



Cuando se trata del **límite en un punto** hay que considerar dos aproximaciones: la de x y la de la función. Si la función tiene límite en un punto es porque una de las aproximaciones obliga a la otra. En este caso,

$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Quien obliga es ε (de ahí el $\forall$) que representa a la función. El valor de δ está relacionado con el de ε, de modo que disminuye cuando ε disminuye, ya que al aproximarse la función al valor del límite, x debe aproximarse a a, y estará más próxima a a cuanto más próxima esté la función a su límite. Por ejemplo, $\lim_{x\to3}\frac{x}{3} = 1$ porque $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 3| < \delta$ entonces $\left|\frac{x}{3} - 1\right| < \varepsilon$. Usando ambas inecuaciones se halla la relación entre ε y δ :

$\left|\frac{x}{3} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x-3}{3}\right| < \varepsilon \Rightarrow |x - 3| < 3\varepsilon \Rightarrow \delta < 3\varepsilon$.

3.2. Indeterminaciones $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$ y 1^∞

El álgebra de límites permite resolver casos triviales del cálculo de límites en los que aparece $\pm\infty$, como los siguientes:

$$\lim_{x\to\infty}\left(3\ln x+5\right)=\infty+5=\infty;\ \lim_{x\to\infty}\left(x^2+e^x\right)=\infty+\infty=\infty;\ \lim_{x\to\infty}\left(x^2e^x\right)=\infty\cdot\infty=\infty;\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x}\right)^{x^2}=0^\infty=0;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2+1\right)^{\sqrt{x}}=\infty^\infty=\infty.$$

Sin embargo, los resultados $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, 1^∞, $\infty\cdot 0$, ∞^0, 0^0, que junto a $\frac{0}{0}$ forman el conjunto de las 7 indeterminaciones existentes, no son evidentes. Aquí resolveremos para determinados casos las 3 primeras; para las otras hay que esperar a Matemáticas II.

La indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ sólo la resolveremos para las fracciones algebraicas, pues el procedimiento para cocientes de otro tipo de funciones escapa al nivel de este libro. Usaremos la aproximación asintótica en el numerador y denominador:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5+4x^3-6x^2+1}{x^4+1}=\frac{\infty}{\infty}ind\approx\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\left(3x\right)=\infty.\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{7x^4-5x}{6x^3+3x^2+x}=\frac{\infty}{-\infty}ind\approx\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^4}{6x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{7x}{6}=-\infty$$

En el caso de las fracciones algebraicas pueden darse tres situaciones:

- Grado del numerador mayor que grado del denominador: el límite es ∞ ó $-\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^6-x}{1-4x^3}=\frac{\infty}{\infty}ind\approx\lim_{x\to\infty}\frac{3x^6}{-4x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{3x^3}{4}\right)=-\infty.\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^6-x}{1-4x^3}=\frac{\infty}{\infty}ind\approx\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^6}{-4x^3}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{3x^3}{4}\right)=\infty.$$

- Grado del numerador igual al grado del denominador: el límite es el cociente de los coeficientes de los monomios de mayor grado del numerador y del denominador.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+7x^2}{2+3x-5x^2}=\frac{\infty}{\infty}ind\approx\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2}{-5x^2}=-\frac{7}{5}.\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{6x^3-18}{5x^3+4x-7}=\frac{\infty}{\infty}ind\approx\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^3}{5x^3}=\frac{6}{5}.$$

- Grado del numerador menor que grado del denominador: el límite es cero.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-4x^3}{3x^6-x}=\frac{\infty}{\infty}ind\approx\lim_{x\to\infty}\frac{-4x^3}{3x^6}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{3x^3}=0.\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{7x-45}{x^3+1}=\frac{\infty}{\infty}ind\approx\lim_{x\to-\infty}\frac{7x}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{7}{x^2}=0.$$

Estos resultados pueden usarse directamente; hay que tener precaución con el primero de ellos: que el límite sea ∞ ó $-\infty$ depende de hacia donde tiende x, de los coeficientes de los monomios de mayor grado y del exponente de la x.

Otro caso no trivial es la indeterminación $\infty-\infty$. Resolveremos dos casos:

- **Resta de fracciones algebraicas**: aparece la indeterminación por no haber efectuado la resta; para resolverla basta con restar y aproximar asintóticamente.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}\right)\overset{(*)}{=}\infty-\infty\ ind\overset{restando}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(x+1\right)-x^2\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}\approx\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{x^3}{x+1}\right)\overset{(*)}{=}\infty-\infty\ ind\overset{restando}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(x+1\right)-x^3}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+x^2+x}{x+1}\approx\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{x}=-\infty.$$

- **Funciones con raíces cuadradas**: se multiplica y divide por el conjugado de la raíz.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)=\infty-\infty\, ind \underset{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}{\overset{conjugado}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}\approx\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2\sqrt{x}}=0.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-x\right)=\infty-\infty ind \underset{\sqrt{x^2-3x}+x}{\overset{conjugado}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x-x^2}{\sqrt{x^2-3x}+x}\approx\lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{\sqrt{x^2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{2x}=\frac{-3}{2}.$$

En este caso hay que tener cuidado con el polinomio o los polinomios que estén dentro de las raíces: es aconsejable usar siempre la aproximación asintótica.

La indeterminación 1^∞ puede aparecer al calcular $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$, donde a representa tanto un punto como $\pm\infty$.

Sabemos que $\lim a_n^{b_n} \underset{n^o\, e}{\overset{1^\infty\,(ind)}{=}} \exp\left\{\lim\left[(a_n-1)\cdot b_n\right]\right\}$ (apartado 3 de la **Unidad 2**). Rescribiendo la fórmula para las funciones se obtiene: $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \underset{n^o\, e}{\overset{1^\infty\,(ind)}{=}} \exp\left\{\lim_{x\to a}\left[\left(f(x)-1\right)\cdot g(x)\right]\right\}$

Por ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{x/3} \underset{n^o\, e}{\overset{(*)\; 1^\infty\,(ind)}{=}} \exp\left\{\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x+2}{x}-1\right)\frac{x}{3}\right]\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{3}\right]\right\}=\exp\left\{\frac{2}{3}\right\}=\sqrt[3]{e^2}.$$

$$\lim_{x\to3}(x-2)^{2/x-3} \underset{n^o\, e}{\overset{(*)\; 1^\infty\,(ind)}{=}} \exp\left\{\lim_{x\to3}\left[(x-2-1)\cdot\frac{2}{x-3}\right]\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)}{x-3}\right\}=e^2.$$

En (*) resolvemos directamente la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ para no escribir demasiados cálculos y complicar el límite innecesariamente.

Ejemplos

12. Calcula los límites siguientes: **a)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x^2+1}{x^4+3x}$; **b)** $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3}{1-x^2}$.

Solución :

a) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x^2+1}{x^4+3x}=\frac{-\infty}{\infty} ind \approx \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$ **b)** $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3}{1-x^2}=\frac{\infty}{-\infty} ind \approx \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{-x^2}=-4.$

13. Calcula: **a)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7}-x\right)$; **b)** $\lim_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+5x}\right)$.

Solución :

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7}-x\right)=\infty-\infty\, ind \underset{\sqrt{x^2+7}+x}{\overset{conjugado}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7-x^2}{\sqrt{x^2+7}+x}\approx\lim_{x\to\infty}\frac{7}{\sqrt{x^2}+x}=0.$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+5x}\right)=\infty-\infty\, ind \underset{2x+\sqrt{x^2+5x}}{\overset{conjugado}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-\left(x^2+5x\right)}{2x+\sqrt{x^2+5x}}\approx\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{2x+\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{3x}=\lim_{x\to\infty}x=\infty.$

14. Calcula los siguientes límites: **a)** $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{x+3}$; **b)** $\lim_{x\to-1}(x+2)^{4/x+1}$.

Solución :

a) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{x+3} \underset{n^o\, e}{\overset{1^\infty\,(ind)}{=}} \exp\left\{\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{5}{x}-1\right)(x+3)\right]\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{-5(x+3)}{x}\right\}\approx\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{x}\right\}=e^{-5}=\frac{1}{e^5}.$

b) $\lim_{x\to-1}(x+2)^{4/x+1} \underset{n^o\, e}{\overset{1^\infty\,(ind)}{=}} \exp\left\{\lim_{x\to-1}\left[(x+2-1)\frac{4}{x+1}\right]\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to-1}\frac{4(x+1)}{x+1}\right\}=e^4.$

15. Calcula los siguientes límites: **a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-1}{x^4+2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x^4}{1-x^2}$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-1}{x^4+2}=\dfrac{\infty}{\infty}\,ind\approx\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5}{x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}(4x)=\infty.$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x^4}{1-x^2}=\dfrac{-\infty}{-\infty}\,ind\approx\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^4}{-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=\infty.$

16. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-x\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2-2x}-3x\right)$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-x\right)=\infty-\infty\,ind\underset{\sqrt{1+x+x^2}+x}{\overset{conjugado}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x+x^2-x^2}{\sqrt{1+x+x^2}+x}\approx\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2-2x}-3x\right)=\infty-\infty\,ind\overset{(*)}{\approx}\lim\limits_{x\to\infty}(-3x)=-\infty.$

(*) No se puede usar el conjugado, pues no es una raíz cuadrada. Para hacer la aproximación asintótica observamos que $\sqrt[3]{x^2}=x^{2/3}$ es de menor grado que $-3x$.

17. Calcula los siguientes límites: **a)** $\lim\limits_{x\to4}\left(\sqrt{x-3}\right)^{\frac{2}{x-4}}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^{2x^2}$.

Solución :

a) $\lim\limits_{x\to4}\left(\sqrt{x-3}\right)^{\frac{2}{x-4}}\underset{n^o\,e}{\overset{1^\infty\,(ind)}{=}}\exp\left\{\lim\limits_{x\to4}\left[\left(\sqrt{x-3}-1\right)\cdot\dfrac{2}{x-4}\right]\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2\left(\sqrt{x-3}-1\right)}{x-4}\right\}=\exp\left\{\dfrac{0}{0}\right\}\underset{\sqrt{x-3}+1}{\overset{conjugado}{=}}$

$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2(x-3-1)}{(x-4)\left(\sqrt{x-3}+1\right)}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2}{\sqrt{x-3}+1}\right\}=e.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^{2x^2}\underset{n^o\,e}{\overset{1^\infty\,(ind)}{=}}\exp\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}-1\right)\cdot2x^2\right]\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-1}\right\}=e^2.$

Actividades

5. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-x^2+x^3-x^4}{2+3x-5x^4}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x-1}-\sqrt{2x^2+1}\right)$.

6. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x+4}\right)^{2x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5-3x^4+6x}{2x^2+6x-3}$.

7. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^4+3x^2+6x}{5x^3-3x+1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2+1\right)^{1/x}$.

8. Calcula: **a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2-5x-1}\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-7x^3+4x+1}{3x^3-5x+6}$.

4. Asíntotas

Hay tres tipos de asíntotas: vertical, horizontal y oblicua. La **asíntota vertical** es la recta a la que se acerca la función cuando no está acotada en un punto; las **asíntota horizontal** y **oblicua** son rectas a la que se acerca la función cuando $x \to \pm\infty$.

Las funciones que pueden tener **asíntota vertical** son las definidas como cocientes (en los puntos que anulan el denominador) y las funciones logarítmicas (donde se anula el argumento). La ecuación de una asíntota vertical es $x = a$, siendo a el número que anula al denominador o al argumento de un logaritmo. Para hallar la ecuación de las asíntotas verticales se resuelve la ecuación *DENOMINADOR* = 0 o, si la función es logarítmica, *ARGUMENTO* = 0.

El comportamiento de la función en las proximidades de la asíntota vertical viene dado por los límites laterales.

Ejemplo

18. Halla las asíntotas verticales y estudia el comportamiento de las siguientes funciones en las proximidades de sus asíntotas verticales: **a)** $y = \frac{x-3}{x+4}$; **b)** $f(x) = \frac{5}{x^2-9}$; **c)** $g(x) = \ln(x-5)$.

Solución :

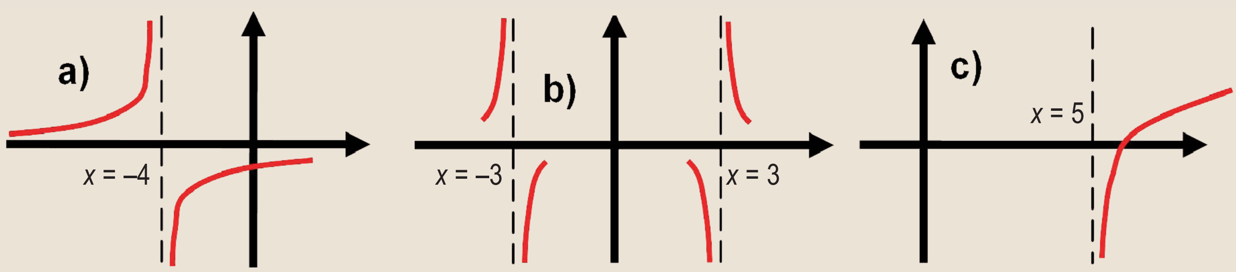
a) $DEN = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow AV\ x = -4;\ \lim\limits_{x\to -4^-} \frac{x-3}{x+4} = \frac{-7}{0^-} = \infty;\ \lim\limits_{x\to -4^+} \frac{x-3}{x+4} = \frac{-7}{0^+} = -\infty.$

b) $DEN = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow AV\ x = -3;\ \lim\limits_{x\to -3^-} \frac{5}{x^2-9} = \frac{5}{0^+} = \infty;\ \lim\limits_{x\to -3^+} \frac{5}{x^2-9} = \frac{5}{0^-} = -\infty;$

$AV\ x = 3;\ \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{5}{x^2-9} = \frac{5}{0^-} = -\infty;\ \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{5}{x^2-9} = \frac{5}{0^+} = \infty.$

c) $ARG = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow AV\ x = 5;\ \lim\limits_{x\to 5^+} \ln(x-5) = -\infty.$

En el caso del neperiano, sólo se puede calcular un límite lateral (por donde el argumento sea positivo) y el límite siempre es $-\infty$.



Las **asíntotas horizontal** y **oblicua** indican adónde se acerca la función cuando $x \to \pm\infty$. Son dos rectas, una de ellas horizontal, tiene pendiente cero, y otra oblicua, de pendiente distinta de cero. Una función ***f*** tiene una **asíntota horizontal** cuando $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = k$, siendo k un número real. La ecuación de la asíntota horizontal es $y_H = k$, donde escribimos el subíndice $_H$ para distinguirlo de la función, que muchas veces se llama y. Una función no tiene asíntota horizontal cuando $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Si la función tiene asíntota horizontal, no tendrá asíntota oblicua, pues la horizontal es un caso particular de la oblicua, con la pendiente igual a cero. Para conocer cómo se acerca la función a la asíntota horizontal (si lo hace por encima o lo hace por debajo), hay que estudiar el signo de la diferencia $y - y_H$ tanto en ∞ como en $-\infty$.

Ejemplo

19. Averigua si las siguientes funciones tienen asíntota horizontal, estudia cómo se aproxima la función a su asíntota horizontal en su caso y represéntalo gráficamente:

a) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$; **b)** $y=\dfrac{3}{8-x}$; **c)** $y=e^{-x}$; **d)** $y=\dfrac{x^2}{x-5}$.

Solución :

a) $y=\dfrac{x+1}{x-1}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{\infty}{\infty}\,ind\approx \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x}=1\Rightarrow y_H=1;\quad y-y_H=\dfrac{x+1}{x-1}-1=\dfrac{2}{x-1}\approx\dfrac{2}{x}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}(y-y_H)\approx \operatorname{sgn}\left(\frac{2}{x}\right)\begin{cases}<0\ \textit{cuando}\ x\to-\infty\Rightarrow y<y_H\\ >0\ \textit{cuando}\ x\to\infty\Rightarrow y>y_H\end{cases}.$$

b) $y=\dfrac{3}{8-x}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{8-x}=0\Rightarrow y_H=0;\ \ y-y_H=\dfrac{3}{8-x}\approx\dfrac{3}{-x}\Rightarrow$

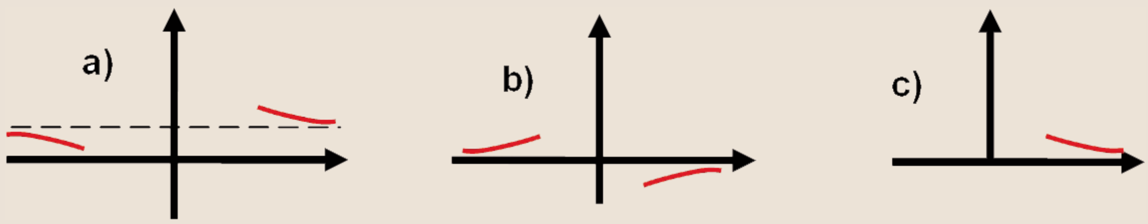
$$\Rightarrow \operatorname{sgn}(y-y_H)\approx \operatorname{sgn}\left(-\frac{3}{x}\right)\begin{cases}>0\ \textit{cuando}\ x\to-\infty\Rightarrow y>y_H\\ <0\ \textit{cuando}\ x\to-\infty\Rightarrow y<y_H\end{cases}.$$

c) $y=e^{-x}\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\infty;\ \lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=0\Rightarrow y_H=0$ cuando $x\to\infty;\ \ y-y_H=e^{-x}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}(y-y_H)\approx \operatorname{sgn}\left(e^{-x}\right)>0\ \textit{cuando}\ x\to\infty\Rightarrow y>y_H.$$

Esta función tiene asíntota sólo cuando $x\to\infty$, pero no cuando $x\to-\infty$. Éste, junto con el de las funciones que tienen asíntotas horizontales distintas en ∞ y $-\infty$, son casos poco habituales que aquí mostramos para que se sepa de su existencia.

d) $y=\dfrac{x^2}{x-5}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x-5}=\dfrac{\infty}{\infty}\,ind\approx \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty\Rightarrow$ no tiene asíntota horizontal.



Una **asíntota oblicua** es una recta de ecuación $y_{Ob}=mx+n$ a la que se aproxima la función cuando $x\to\pm\infty$.

¿Cómo calculamos m y n? Si f se aproxima a y_{Ob} deberá verificar que:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{y_{Ob}}=1\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{mx+n}\approx \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{mx}=1\Rightarrow m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x};$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-y_{Ob}\right]=0\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx-n\right]=0\Rightarrow n=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right].$$

Observa que primero se calcula m, y debe dar un valor finito, pues en caso contrario no tendría asíntota oblicua, y luego calculamos n. Igual que en el caso de la asíntota horizontal, para ver cómo se acerca la curva a la asíntota hay que calcular el signo de la diferencia $y-y_{Ob}$.

Recuerda que sólo se busca una asíntota oblicua cuando la función no tiene asíntota horizontal. También puede darse el caso de que la asíntota oblicua sea distinta para ∞ que para $-\infty$, pero para funciones más complejas que las que trataremos aquí.

Ejemplos

20. Averigua si las siguientes funciones tienen asíntota oblicua, estudia cómo se aproxima la función a su asíntota oblicua en su caso y represéntalo gráficamente:

a) $y=\dfrac{x^2}{x-5}$; **b)** $y=\dfrac{x^2+1}{2x-3}$; **c)** $y=\dfrac{2x^4}{x^3+5}$; **d)** $y=\dfrac{x^3}{x+9}$.

Solución :

a) Lo primero que hay que comprobar es si tiene o no asíntota horizontal (AH):

$$y=\frac{x^2}{x-5}\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x-5}=\frac{\infty}{\infty}\,ind\approx\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty\Rightarrow \text{no tiene AH;}$$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(x-5)}\overset{(**)}{\approx}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

(*) Al dividir una fracción algebraica por x, esta x siempre multiplicará al denominador de la fracción algebraica.

(**) Aligeramos la escritura y evitamos escribir indeterminación cada vez que aparece, para centrarnos en el cálculo importante.

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-5}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x}{x-5}\approx\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x}{x}=5.$$

La asíntota oblicua (AOb) tiene por ecuación $y_{Ob}=x+5$. Para ver cómo se acerca la curva a su AOb calculamos

$$y-y_{Ob}=\frac{x^2}{x-5}-(x+5)=\frac{25}{x-5}\approx\frac{25}{x}\Rightarrow \operatorname{sgn}(y-y_{Ob})=\operatorname{sgn}\left(\frac{25}{x}\right)\begin{cases}<0\text{ cuando }x\to-\infty\Rightarrow y<y_{Ob}\\ >0\text{ cuando }x\to\infty\Rightarrow y>y_{Ob}\end{cases}.$$

Si queremos, en la resta $y-y_{Ob}$ ya está hecha la parte $f(x)-mx=\dfrac{5x}{x-5}$ en el cálculo de n. Así que sólo hay que hacer $\dfrac{5x}{x-5}-5=\dfrac{25}{x-5}$.

b) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{2x-3}\approx\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{2}=\pm\infty\Rightarrow\text{no tiene AH; } m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{2x^2-3x}\approx\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2};$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x-3}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x+2}{2(2x-3)}\approx\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}.$$

La AOb tiene por ecuación $y_{Ob}=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$.

$$y-y_{Ob}=\frac{3x+2}{4x-6}-\frac{3}{4}=\frac{26}{16x-24}\approx\frac{13}{8x}\Rightarrow \operatorname{sgn}(y-y_{Ob})=\operatorname{sgn}\left(\frac{13}{8x}\right)\begin{cases}<0\text{ si }x\to-\infty\Rightarrow y<y_{Ob}\\ >0\text{ si }x\to\infty\Rightarrow y>y_{Ob}\end{cases}.$$

c) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^4}{x^3+5}\approx\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^4}{x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}(2x)=\pm\infty\Rightarrow\text{no tiene AH; } m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^4}{x^4+5x}\approx\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^4}{x^4}=2;$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^4}{x^3+5}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-10x}{x^3+5}\approx\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-10}{x^2}=0.$$

La AOb tiene por ecuación $y_{Ob}=2x$.

$$y-y_{Ob}=\frac{-10x}{x^3+5}\approx\frac{-10}{x^2}\Rightarrow \operatorname{sgn}(y-y_{Ob})=\operatorname{sgn}\left(\frac{-10}{x^2}\right)<0\text{ si }x\to\pm\infty\Rightarrow y<y_{Ob}.$$

d) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x+9}\approx\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x^2=\infty\Rightarrow\text{no tiene AH;}$$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2+9x}\approx\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty\Rightarrow\text{no tiene AOb.}$$

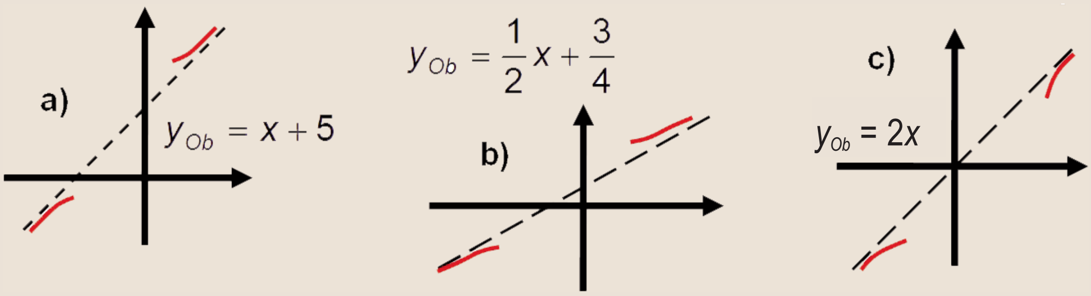
Para que una fracción algebraica tenga asíntota oblicua la diferencia entre el grado del numerador y del denominador debe ser uno.

Las asíntotas oblicuas son rectas, luego para representarlas necesitamos dos puntos.

x	−5	5
$y_{Ob} = x + 5$	0	10

x	$-\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$
$y_{Ob} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$	−1	2

x	−3	3
$y_{Ob} = 2x$	−6	6



21. Averigua las asíntotas de $y = \dfrac{5}{3x^2 - 12}$ e indica cómo se aproxima la función a sus asíntotas. Represéntalo gráficamente.

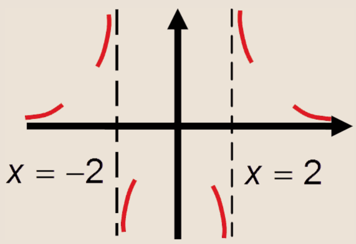
Solución :

AV: $DEN = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2.$

$$x = -2 \underset{\text{laterales}}{\overset{\text{límites}}{\Longrightarrow}} \lim_{x\to -2^-} \frac{5}{3(x+2)(x-2)} = \frac{5}{0^+} = \infty; \ \lim_{x\to -2^+} \frac{5}{3(x+2)(x-2)} = \frac{5}{0^-} = -\infty;$$

$$x = 2 \underset{\text{laterales}}{\overset{\text{límites}}{\Longrightarrow}} \lim_{x\to 2^-} \frac{5}{3(x+2)(x-2)} = \frac{5}{0^-} = -\infty; \ \lim_{x\to 2^+} \frac{5}{3(x+2)(x-2)} = \frac{5}{0^+} = \infty.$$

AH: $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{3x^2 - 12} = 0 \Rightarrow y_H = 0.$



$y - y_H = \dfrac{5}{3x^2 - 12} \approx \dfrac{5}{3x^2} \Rightarrow \operatorname{sgn}(y - y_H) = \operatorname{sgn}\left(\dfrac{5}{3x^2}\right) > 0 \text{ si } x \to \pm\infty \Rightarrow y > y_H$. No tiene A Ob por tener AH.

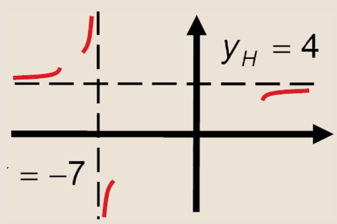
22. Averigua las asíntotas de $y = \dfrac{4x+3}{x+7}$ y estudia cómo se acerca a sus asíntotas. Represéntalo gráficamente.

Solución :

AV: $DEN = 0 \Rightarrow x = -7 \underset{\text{laterales}}{\overset{\text{límites}}{\Longrightarrow}} \displaystyle\lim_{x\to -7^-} \frac{4x+3}{x+7} = \frac{-25}{0^-} = \infty; \ \lim_{x\to -7^+} \frac{4x+3}{x+7} = \frac{-25}{0^+} = -\infty;$

AH: $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x+3}{x+7} \approx \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x} = 4 \Rightarrow y_H = 4; \ y - y_H = \frac{4x+3}{x+7} - 4 = \frac{-25}{x+7} \approx \frac{-25}{x} \Rightarrow$

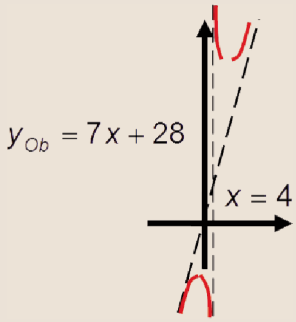
$$\Rightarrow \operatorname{sgn}(y - y_H) = \operatorname{sgn}\left(\frac{-25}{x}\right) \begin{cases} > 0, \ si \ x \to -\infty \Rightarrow y > y_H \\ < 0, \ si \ x \to \infty \Rightarrow y < y_H \end{cases}.$$



No tiene asíntota oblicua por tener asíntota horizontal.

23. Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{7x^2}{x-4}$ y estudia el comportamiento de la función cerca de sus asíntotas. Represéntalo gráficamente.

Solución :



AV: $DEN=0 \Rightarrow x=4 \underset{laterales}{\overset{límites}{\Rightarrow}} \lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{7x^2}{x-4}=\dfrac{28}{0^-}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{7x^2}{x-4}=\dfrac{28}{0^+}=\infty;$

AH: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{7x^2}{x-4}\approx\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{7x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(7x)=\pm\infty \Rightarrow$ No tiene AH;

AOb: $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{7x^2}{x^2-4x}\approx\lim\limits_{x\to\mp\infty}\dfrac{7x^2}{x^2}=7;$

$n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{7x^2}{x-4}-7x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{28x}{x-4}\approx\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{28x}{x}=28.$La ecuación de la AOb es $y_{Ob}=7x+28.$

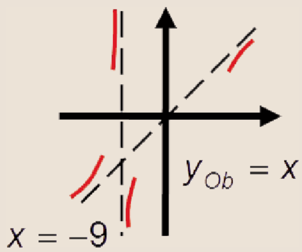
$y-y_{Ob}=\dfrac{28x}{x-4}-28=\dfrac{112}{x-4}\approx\dfrac{112}{x}\Rightarrow \operatorname{sgn}(y-y_{Ob})=\operatorname{sgn}\left(\dfrac{112}{x}\right)\begin{cases}<0 \text{ si } x\to-\infty \Rightarrow y<y_{Ob}\\ >0 \text{ si } x\to\infty \Rightarrow y>y_{Ob}\end{cases}.$

24. Averigua la asíntotas de $y=x-\dfrac{1}{x+9}$ e indica cómo se aproxima dicha función a sus asíntotas.

Solución :

AV: $DEN=0 \Rightarrow x=-9 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-9^-}\left(x-\dfrac{1}{x+9}\right)=-\dfrac{1}{0^-}=\infty;\ \lim\limits_{x\to-9^+}\left(x-\dfrac{1}{x+9}\right)=-\dfrac{1}{0^+}=-\infty;$

AH: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x-\dfrac{1}{x+9}\right)=\pm\infty \Rightarrow$ no tiene asíntota horizontal.



AOb: $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2+9x}\right)=1;$

$n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x-\dfrac{1}{x+9}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{1}{x+9}\right)=0;$

La AOb tiene por ecuación $y_{Ob}=x.$

$y-y_{Ob}=-\dfrac{1}{x+9}\approx-\dfrac{1}{x}\Rightarrow \operatorname{sgn}(y-y_{Ob})=\operatorname{sgn}\left(-\dfrac{1}{x}\right)\begin{cases}>0 \text{ si } x\to-\infty \Rightarrow y>y_{Ob}\\ <0 \text{ si } x\to\infty \Rightarrow y<y_{Ob}\end{cases}.$

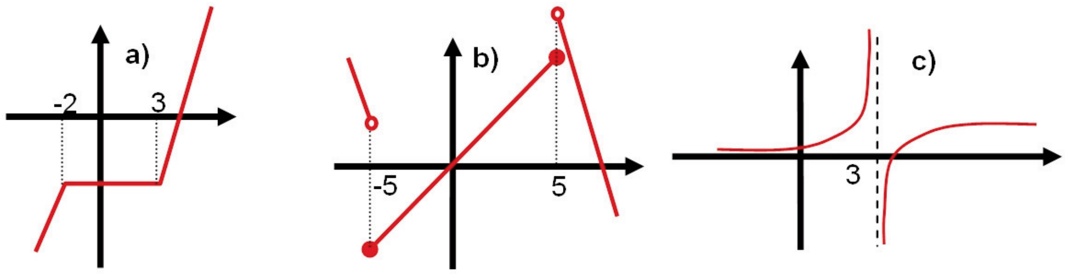
Actividad

9. Averigua las asíntotas de las siguientes funciones, estudia su comportamiento cerca de sus asíntotas y represéntalo gráficamente:

a) $y=\dfrac{3-x}{4-x}$; **b)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$; **c)** $f(x)=\dfrac{7x^2-5}{x^2+1}$; **d)** $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-16}$.

5. Idea de continuidad y de discontinuidad

De forma gráfica, se dice que una función es continua en un punto cuando se puede trazar su gráfica sin levantar el lápiz del papel, mientras que es discontinua o no continua en un punto cuando hay que levantar el lápiz del papel para seguir trazando la gráfica. Así, las funciones polinómicas, la exponencial, el seno y el coseno son continuas en *R*, mientras que las candidatas a no ser continuas en algún punto son las definidas a trozos y las definidas como cocientes. Observa las siguientes gráficas:



La función **a)** es continua en *R*; podría presentar problemas en $x = -2$ y $x = 3$ que es, como se aprecia en la gráfica, donde hay cambios de definición, pero ahí los trozos de la función empalman perfectamente. La función **b)** no es continua en $x = -5$ ni en $x = 5$, pues presenta sendos saltos en los que es necesario levantar el lápiz. Tampoco es continua la función **c)** en $x = 3$, pues tiene una asíntota vertical.

Analíticamente, se dice que una función es continua en un punto $x = a$ cuando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

En el caso de las funciones definidas a trozos los posibles puntos de discontinuidad son aquellos en los que hay un cambio de definición.

Para estudiar la **continuidad** en un punto en el que hay un cambio de definición en una función definida a trozos se dan los tres pasos siguientes:

1. Se calcula $f(a)$.
2. Se calculan los límites laterales. Si coinciden se verifica que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$. Si no coinciden, $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x)$, por lo que la función no sería continua en el punto.
3. ¿$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$? Si coinciden, la función es continua en el punto. En caso contrario, no es continua.

Estos cálculos no son más que el desglose paso a paso del cálculo del valor y del límite de la función; el último es la pregunta que debemos hacer para ver si es continua.

Veamos qué le ocurre a $f(x) = \begin{cases} 4x - 1, \; si \; x < 0 \\ 1 + \dfrac{x^2}{4}, \; si \; 0 \le x \le 4 \\ 9 - x, \; si \; x > 4 \end{cases}$.

Los posibles puntos de discontinuidad son $x = 0$ y $x = 4$. Se efectúa el estudio en cada punto:

En $x = 0$:

1.– $f(0) = 1 + \left.\dfrac{x^2}{4}\right|_{x=0} = 1.$

2.– $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (4x - 1) = -1; \; \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{x^2}{4}\right) = 1 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 0} f(x) \Rightarrow$ la función no es continua en $x = 0$.

En $x = 4$:

1.– $f(4) = 1 + \left.\frac{x^2}{4}\right|_{x=4} = 5$

2.– $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4}\left(1+\frac{x^2}{4}\right) = 5 = \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4}(9-x) \Rightarrow \lim_{x\to 4} f(x) = 5.$

3.– $\lim_{x\to 4} f(x) = f(4) = 5.$

La función es continua en $x = 4$ al coincidir ambos valores.

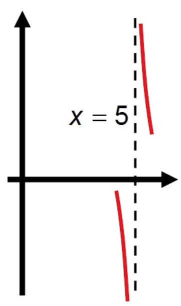
En resumen, la función es continua en $R - \{0\}$ y, como los valores que toma la función a la izquierda y a la derecha del 0 son finitos, presenta una **discontinuidad inevitable de salto finito** en $x = 0$. El salto valdría $\left|\lim_{x\to 0^+} f(x) - \lim_{x\to 0^-} f(x)\right| = 2$ unidades.

En las funciones definidas a trozos puede ocurrir que la función no esté definida en algún punto, lo que puede originar una discontinuidad. Por ejemplo, la función $f(x) = \begin{cases} 1-x, \text{ si } x < -1 \\ x+3, \text{ si } x > -1 \end{cases}$. El punto problemático es $x = -1$, porque $\nexists f(-1)$, ya que no está definido en la función. Sin embargo, los límites laterales verifican que $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1}(1-x) = 2 = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1}(x+3)$, por lo que f sería continua en $x = -1$ si se redefine la función como $f(x) = \begin{cases} 1-x, \text{ si } x < -1 \\ x+3, \text{ si } x \geq -1 \end{cases}$. La función presenta una **discontinuidad evitable** en $x = -1$.

Parecido a este caso es el siguiente: $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ si } x < 2 \\ 7, \text{ si } x = 2 \\ 5-x, \text{ si } x > 2 \end{cases}$. Ahora $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(x+1) = 3 = \lim_{x\to 2^+} f(x) =$ $= \lim_{x\to 2}(5-x) \neq f(2)$. Esta discontinuidad se resuelve redefiniendo la función de modo que $f(2) = 3$ y se dice que la función presenta una discontinuidad evitable en $x = 2$.

Otras funciones que pueden presentar discontinuidades son las definidas como cocientes en los puntos en los que el denominador se hace cero. Por ejemplo, la función $y = \frac{2x-7}{x-5}$ presenta problemas en $x = 5$ donde verifica que $\lim_{x\to 5^-} \frac{2x-7}{x-5} = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x\to 5^+} \frac{2x-7}{x-5} = \frac{3}{0^+} = \infty$. Así, la función será continua en $R - \{5\}$ y presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x = 5$. En este caso $\nexists y(5)$ porque es imposible calcular $\frac{3}{0}$.

La función tiene una asíntota vertical de ecuación $x = 5$.



También puede aparecer el resultado $\frac{0}{0}$. En este caso, hay que recurrir al límite y resolver la indeterminación.

$g(x) = \frac{x^2-9}{x+3} \Rightarrow DEN = 0 \Rightarrow x+3 = 0 \Rightarrow x = -3.$

Posible punto de discontinuidad $x = -3$:

1.- $g(-3)=\frac{0}{0}$.

2.- $\lim\limits_{x\to -3} g(x)=\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}(x-3)=-6$. Al obtener un resultado finito, se hace $g(-3)=-6$ y la función presenta una discontinuidad evitable en $x=-3$. Se redefine la función como

$g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x+3}, si\ x\neq -3\\ -6, si\ x=-3\end{cases}$, aunque tampoco es incorrecto recurrir a la simplificación $g(x)=x-3$.

En resumen, hay 3 posibilidades:

i. Que la función presente una **discontinuidad inevitable de salto finito** (suele darse en funciones definidas a trozos).

ii. Que la función presente una **discontinuidad inevitable de salto infinito** (suele darse en funciones definidas como cocientes). La función tiene asíntotas verticales en los puntos en los que presenta este tipo de discontinuidad.

iii. Que la función presente una **discontinuidad evitable** que se evita redefiniendo la función.

Ejemplos

25. Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases}x, si\ x<0\\ 2x+6, si\ x\geq 0\end{cases}$ y representa la función.

Solución :

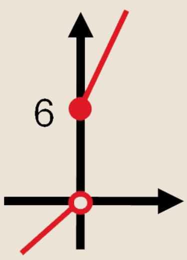
El posible punto de discontinuidad es $x=0$, que es donde cambia de definición. Se comprueban las tres condiciones exigidas para que la función sea continua:

i) $f(0)=2\cdot 0+6=6$;

ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x+6)=6\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)\Rightarrow$ la función no es continua en $x=0$. Resumiendo, f es continua en $R-\{0\}$ y presenta en $x=0$ una discontinuidad de salto finito de valor 6 unidades.

Como se trata de dos rectas son suficientes 4 puntos para representarla:

x	–3	0^-	0	3
f(x)	–3	0	6	12



26. Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ si } x\le 1 \\ 2x, \text{ si } x>1 \end{cases}$ y represéntala gráficamente.

Solución :

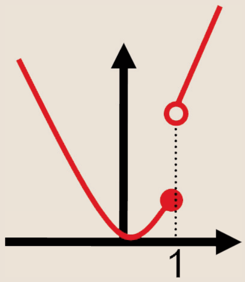
El único posible punto de discontinuidad es $x=1$.

i) $f(1)=1^2=1;$

ii) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} x^2=1^2=1;\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} 2x=2\cdot 1=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x) \Rightarrow f$ no es continua en $x=1$. En resumen, f es continua en $R-\{1\}$ y presenta en $x=1$ una discontinuidad de salto finito de valor 1 unidad.

Ahora hay que representar una parábola ($x_V=0$) y una recta:

x	–2	0	1	1^+	3
$f(x)$	4	0	1	2	6



27. Estudia la continuidad de $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$.

Solución :

Los posibles puntos de discontinuidad son aquellos que anulan el denominador: $DEN=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow$ $\Rightarrow x=\pm 1$.

Estudio en $x=1$: $f(1)=\dfrac{1^2-1-2}{1^2-1}=\dfrac{-2}{0}\Rightarrow \nexists f(1)\Rightarrow f$ no es continua en $x=1$.

Como $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}=\dfrac{-2}{0^-}=\infty;\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty$ f presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x=1$.

Estudio en $x=-1$: $f(-1)=\dfrac{(-1)^2-(-1)-2}{(-1)^2-1}=\dfrac{0}{0}\,ind$. Para que la función presente una discontinuidad evitable debe verificar que $f(-1)=\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^2-1}=\frac{0}{0}ind \overset{\text{factorizando}}{=} \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)} \overset{\text{simplificando}}{=} \lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x-1}=\frac{3}{2}\Rightarrow f(-1)=\frac{3}{2}$$ para que sea continua en $x=-1$.

Podemos resumir de dos maneras:

i) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$ es continua en $R-\{1\}$. Presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x=1$ y una discontinuidad evitable en $x=-1$.

ii) La función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}, \text{ si } x\ne -1 \\ \dfrac{3}{2}, \text{ si } x=-1 \end{cases}$ es continua en $R-\{1\}$.

28. Estudia la continuidad de $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{4x-12}$.

Solución :

$DEN=0 \Rightarrow 4x-12=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow$ el único posible punto de discontinuidad es $x=3$.

Estudio en $x=3$: $f(3)=\dfrac{3^2-3\cdot 3}{4\cdot 3-12}=\dfrac{0}{0}\,ind \Rightarrow$ Para que la función presente una discontinuidad evitable debe verificar que $f(3)=\lim\limits_{x\to 3} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{4x-12}=\dfrac{0}{0}\,ind \overset{factorizando}{=} \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)}{4(x-3)} \overset{simplificando}{=} \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{4}=\dfrac{3}{4}$. Podemos resumir de dos maneras:

i) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{4x-12}$ es continua en R y presenta una discontinuidad evitable en $x=3$.

ii) La función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x}{4x-12}, & si\ x\neq 3\\ \dfrac{3}{4}, & si\ x=3\end{cases}$ es continua en R.

29. Determina k para que $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x}{x^2-25}, & si\ x\neq 5\\ k, & si\ x=5\end{cases}$ sea continua en $x=5$.

Solución :

Para que sea continua en $x=5$ debe verificar que $f(5)=\lim\limits_{x\to 5} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x}{x^2-25}=\dfrac{5^2-5\cdot 5}{5^2-25}=\dfrac{0}{0}\,ind \overset{factorizando}{=} \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x(x-5)}{(x+5)(x-5)} \overset{simplificando}{=} \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x}{x+5}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$ para que f sea continua en $x=5$.

30. Calcula a para que $f(x)=\begin{cases}3ax-1, & si\ x<-1\\ 5-ax, & si\ x\geq -1\end{cases}$ sea continua en R.

Solución :

El único posible punto de discontinuidad es $x=-1 \Rightarrow$ para que f sea continua en R, $f(-1)=\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, y para que $\exists \lim\limits_{x\to -1} f(x)$, han de coincidir los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(3ax-1)=-3a-1$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(5-ax)=5+a \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \Rightarrow -3a-1=5+a \Rightarrow 4a=-6 \Rightarrow a=-\dfrac{2}{3} \Rightarrow f$ es continua en R si $a=-\dfrac{2}{3}$.

Como $f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, se cumplen las 3 condiciones.

Actividades

10. Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases} x^2-x+1, \text{ si } x\le -2 \\ 3x-3, \text{ si } x>-2 \end{cases}$ y represéntala gráficamente.

11. Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+2, \text{ si } x\le 2 \\ \ln(x-1), \text{ si } x>2 \end{cases}$ y represéntala gráficamente.

12. Estudia la continuidad de:

a) $y=\dfrac{3}{x}$; **b)** $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$.

13. Estudia la continuidad de:

a) $f(x)=\dfrac{5x+1}{x^2-2x-8}$; **b)** $y=\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-x-3}$.

14. Determina k para que $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-6x+9}{3x^2-27}, \text{ si } x\neq 3 \\ k, \text{ si } x=3 \end{cases}$ sea continua en $x=3$.

15. Calcula m para que $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x^2+3x}, \text{ si } x\neq -3 \\ m, \text{ si } x=-3 \end{cases}$ sea continua en $x=-3$.

16. Calcula el valor de a para que la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+1, \text{ si } x\le 3 \\ 2-x, \text{ si } x>3 \end{cases}$ sea continua en R.

Para saber más...

Una función es continua en un punto $x=a$ cuando $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. Esta definición puede hacerse rigurosa acudiendo a la definición de límite de una función en un punto. De este modo, diremos que f es continua en un punto $x=a$ cuando $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si $|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Observa que ahora el valor a verifica la inecuación para δ y que, en la inecuación para ε, escribimos directamente el valor del $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, que es $f(a)$.

A partir de esta definición podemos afirmar que una función que es continua en un punto está acotada en un entorno de dicho punto. Se obtiene directamente de la inecuación para ε:

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<f(x)-f(a)<\varepsilon \Rightarrow f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon.$$

Si, además, $f(a)\neq 0$, f tiene el mismo signo que $f(a)$ en un entorno de a. Usando la desigualdad anterior y haciendo en ella $\varepsilon=\dfrac{f(a)}{3}$, o cualquier otra fracción menor que $f(a)$, se obtiene que $\dfrac{2}{3}f(a)<f(x)<\dfrac{4}{3}f(a)\Rightarrow sgn f(x)=sgn f(a)$.

Estos teoremas se pueden ampliar y así, si una función es continua en un intervalo $[a,b]$, está acotada y alcanza su máximo y su mínimo en dicho intervalo (teorema de Weierstrass). Además, si la función cambia de signo en $[a,b]$, esto es, $sgn f(a)\neq sgn f(b)$, se anula en un punto del interior del intervalo (teorema de Bolzano).

La importancia de la continuidad se extiende a la derivada, de modo que para que una función sea derivable previamente ha de ser continua. Una función es derivable cuando $\exists \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Observa que el límite del denominador es 0, por lo que la única forma de que exista el límite del cociente es que el límite del numerador también sea 0; se llega a una indeterminación $\dfrac{0}{0}$, que debe dar un resultado finito. Por ello, $\lim\limits_{h\to 0}\left[f(a+h)-f(a)\right]=0\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$, que es otra forma de decir que f es continua en $x=a$ (no hay más que hacer el cambio $x=a+h$).

Recuerda

- ✓ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ es el valor al que se acerca f cuando x se aproxima a a.
- ✓ **Álgebra de límites**
  - $\lim\limits_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a}(x)$.
  - $\lim\limits_{x\to a}(f \cdot g)(x) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$. Cuando un factor es constante: $\lim\limits_{x\to a}(k\cdot f)(x) = k\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
  - $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$. También: $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{k}{f}\right)(x) = \dfrac{k}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$.
  - $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$.
- ✓ Los resultados $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$ y 1^{∞} son **indeterminaciones**. Las resolvemos:
  - $\dfrac{0}{0}$, factorizando numerador y denominador, o usando el conjugado si hay raíces cuadradas.
  - $\dfrac{\infty}{\infty}$ mediante la aproximación asintótica $\approx$.
  - $\infty-\infty$, bien efectuando la resta, bien mediante el conjugado, si hay raíces cuadradas.
  - 1^{∞} usando el número e: $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} \overset{1^{\infty}\ ind}{\underset{n^{o}\ e}{=}} \exp\left\{\lim\limits_{x\to a}\left[\left(f(x)-1\right)\cdot g(x)\right]\right\}$.
- ✓ Hay tres tipos de asíntotas:
  - **asíntota vertical**: recta de ecuación $x = a$ a la que se acerca la función cuando no está acotada en un punto.
  - **asíntota horizontal**: recta de ecuación $y_H = k$, con $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = k$, a la que se acerca la función cuando $x \longrightarrow \pm\infty$.
  - **asíntota oblicua:** recta de ecuación $y_{Ob} = mx + n$, a la que se acerca la función cuando $x \longrightarrow \pm\infty$, con $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - mx\right]$.
- ✓ Una función es **continua** en $x = a$ cuando $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. En el caso de las funciones definidas a trozos se dan los tres pasos siguientes:
  1. Se calcula $f(a)$.
  2. Se calculan los límites laterales: si coinciden $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$; si no coinciden $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ y la función no es continua en el punto.
  3. ¿ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$? Si coinciden, es continua en el punto. En caso contrario no lo es.
- ✓ Si la función no es continua, puede presentar una **discontinuidad**:
  - i. **Inevitable de salto finito** (suele darse en funciones definidas a trozos).
  - ii. **Inevitable de salto infinito** (suele darse en funciones definidas como cocientes). La función tiene asíntotas verticales en los puntos en los que presenta esta discontinuidad.
  - iii. **Evitable** que se evita redefiniendo la función.