12 Integración

ACTIVIDAD INICIAL

12.I. Encuentra la función que mide el área de las regiones limitadas por el eje horizontal y las rectas:

a) $y = 3x - 3$; $x = 1$; la recta vertical trazada por el punto de abscisa x con $x > 1$.

b) $y = x$ si $x \leq 3$; $y = -x + 6$ si $x > 3$; la recta vertical trazada por el punto de abscisa x.

Distinguir entre $0 \leq x \leq 3$ y $3 < x \leq 6$.

En ambos casos, calcula también la derivada de las funciones área obtenidas.

a) Área $= F(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(3x - 3) = \frac{3}{2}(x^2 - 2x + 1)$, $F'(x) = 3x - 3$.

b) Si $x \leq 3$, Área $= F(x) = \frac{1}{2}x^2$

Si $x > 3$, Área $= F(x) = \frac{9}{2} + \frac{3 + 6 - x}{2}(x - 3) = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}(9 - x)(x - 3) =$

$= \frac{9}{2} + \frac{1}{2}(9x - 27 - x^2 + 3x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 9$

Así pues, $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{si } x \leqslant 3 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 9 & \text{si } 3 < x \leqslant 6 \end{cases}$ $\quad F'(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 3 \\ -x + 6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

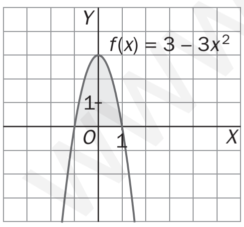
Para obtener $F'(3)$, es decir, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(3 + h) - F(3)}{h}$, obtenemos $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{F(3 + h) - F(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}(3 + h)^2 - \frac{9}{2}}{h} =$

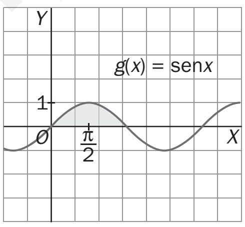
$= \frac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{h^2 + 6h}{h} = 3$ y

$\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{F(3 + h) - F(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}(3 + h)^2 + 6(3 + h) - 9 - \frac{9}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}h^2 + 3h}{h} = 3.$

así que $F'(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 3 \\ -x + 6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

12.1 Calcula el área de las regiones sombreadas.





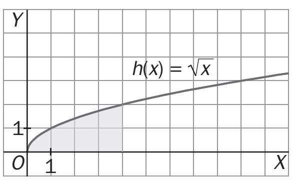
a) $F(x) = 3x - x^3$

Área $= F(1) - F(-1) = 2 - (-2) = 4$

b) $G(x) = -\cos x$

Área $= G(\pi) - G(0) = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2$

12.2 Halla el área del recinto sombreado.



$H(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

Área $= H(4) - H(0) = \frac{16}{3} - (0) = \frac{16}{3}$

12.3 Calcula el área de la zona limitada por la gráfica de $y = x^2$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

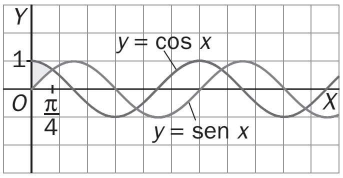
Área $= G(2) - G(0)$ con $G'(x) = x^2$, así que $G(x) = \frac{1}{3}x^3$ y el área pedida es $\frac{8}{3}$.

12.4 Calcula el área encerrada por la parábola $y = x^2 - 4$ y el eje horizontal.

Área $= G(2) - G(-2)$, siendo $G'(x) = 0 - (x^2 - 4) = 4 - x^2$, o sea, $G(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$.

Así pues, $G(2) - G(-2) = \frac{32}{3}$

12.5 Calcula el área de la figura.



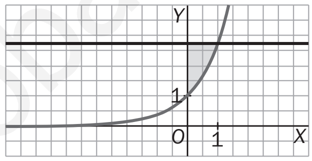
$T(x) = G(x) - F(x)$, en donde $G(x) = \text{sen}\, x$ y

$F(x) = -\cos x \Rightarrow T(x) = \text{sen}\, x + \cos x$

Área $= T\left(\frac{\pi}{4}\right) - T(0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1 = \sqrt{2} - 1$

12.6 Calcula el área de la región limitada por el eje vertical, la recta $y = e$ y la curva $y = e^x$.

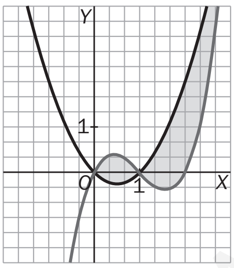
Las líneas $y = e$, $y = e^x$ se cortan cuando $x = 1$, así que el área pedida es $(F - G)(1) - (F - G)(0)$, siendo $F'(x) - G'(x) = e - e^x$, es decir, $(F - G)(x) = ex - e^x$, por lo que $(F - G)(1) - (F - G)(0) = 1$.



12.7 Calcula el área encerrada entre las curvas $f(x) = x(x - 1)(x - 2)$ y $g(x) = x(x - 1)$.

Las curvas $f(x) = x(x - 1)(x - 2)$ y $g(x) = x(x - 1)$ se cortan cuando $x(x - 1)[x - 2 - 1] = 0$, es decir, $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

Un esbozo de las gráficas de f y g nos conduce a:



Por lo que en $[0, 1]$ es $f(x) \geq g(x)$ y en $[1, 3]$ es $g(x) \geqslant f(x)$, y el área pedida es:

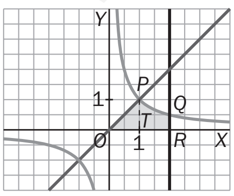
$(F - G)(1) - (F - G)(0) + (G - F)(3) - (G - F)(1) =$

$= 2(F - G)(1) - (F - G)(0) - (F - G)(3)$, donde $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$.

Así pues, $F'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, con lo que $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$ y $G'(x) = x^2 - x$, es decir, $G(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^2}{2}$, por lo que $(F - G)(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ y el área pedida es $\frac{37}{12}$.

12.8 Calcula el área del recinto limitado por la curva $y = \frac{1}{x}$, las rectas $y = x$, $x = 2$ y el eje horizontal.

Un esbozo de la región es este:



Hallamos el punto de corte de las líneas en cuestión, que son $P(1, 1)$ y $Q\left(2, \frac{1}{2}\right)$, y el área del recinto es:

Área triángulo OPT + Área región $TPQR = \frac{1}{2} + G(2) - G(1)$, siendo $G'(x) = \frac{1}{x}$, es decir, $G(x) = -\frac{1}{x^2}$, y el área es: $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{5}{4}$.

12.9 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int (2x^4 - 3x^2 + 1)\,dx$

b) $\int \left(x^3 - \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}\right) dx$

c) $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 + 2x}{x^2}\,dx$

d) $\int \sqrt[3]{\sqrt{x^7}}\,dx$

a) $\int (2x^4 - 3x^2 + 1)dx = \frac{2x^5}{5} - x^3 + x + C$

b) $\int (x^3 - \frac{1}{x^2} + \sqrt{x})dx = \int (x^3 - x^{-2} + x^{\frac{1}{2}})dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

c) $\int \left(\frac{\sqrt{x} - x^3 + 2x}{x^2}\right)dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - x + \frac{2}{x}\right)dx = \frac{-2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| + C$

d) $\int \sqrt[3]{x^7}\,dx = \int x^{\frac{7}{6}}\,dx = \frac{6}{13}\sqrt[6]{x^{13}} + C$

12.10 Halla las primitivas de las funciones siguientes.

a) $f(x) = -3e^x$

b) $f(x) = 3^x - \frac{4}{x}$

c) $f(x) = 5\,\text{sen}\,x - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x} - \cos x$

a) $\int -3e^x dx = -3e^x + C$

b) $\int \left(3^x - \frac{4}{x}\right)dx = \frac{1}{\ln 3}3^x - 4\ln|x| + C$

c) $\int \left(5\,\text{sen}\,x - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)dx = -5\cos x + \arccos x + C$

d) $\int (\sqrt[3]{x} - \cos x)dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - \text{sen}\,x + C$

12.11 Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{t + 1}{\sqrt{t^2 + 2t + 3}}\,dt$

b) $\int \frac{e^{2s}}{1 + e^{2s}}\,ds$

c) $\int (x^2 + 1)^{20} \cdot 5x\,dx$

d) $\int \frac{\cos(\ln t)}{t}\,dt$

e) $\int \frac{e^s}{1 + e^{2s}}\,ds$

f) $\int \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx$

a) $\int \frac{t + 1}{\sqrt{t^2 + 2t + 3}}\,dt = \int (t^2 + 2t + 3)^{\frac{1}{2}} \cdot 2(t + 1) \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{t^2 + 2t + 3} \cdot 2 + C = \sqrt{t^2 + 2t + 3} + C$

b) $\int \frac{e^{2s}}{1 + e^{2s}}\,ds = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2s}}{1 + e^{2s}}\,ds = \frac{1}{2}\ln(1 + e^{2s}) + C$

c) $\int (x^2 + 1)^{20} \cdot 5x\,dx = \frac{5}{2}\int (x^2 + 1)^{20} \cdot 2x\,dx = \frac{5}{2}\,\frac{(x^2 + 1)^{21}}{21} = \frac{5}{42}(x^2 + 1)^{21} + C$

d) $\int \frac{\cos(\ln t)}{t}\,dt = \int \cos(\ln t) \cdot \frac{1}{t}\,dt = \text{sen}(\ln t) + C$

e) $\int \frac{e^s}{1 + e^{2s}}\,ds = \int \frac{1}{1 + (e^s)^2} \cdot e^s\,ds = \text{arctg}\,e^s + C$

f) $\int \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx = \int \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2)^2}}\,dx = \text{arcsen}\,x^2 + C$

12.12 Halla las primitivas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x(\text{sen}\,x^2)(\cos^4 x^2)$

b) $\int tg\,(3x + 2)\,dx$

a) $\int 2x(\text{sen}\,x^2)(\cos^4 x^2)\,dx = \int (\cos x^2)4(-4\text{sen}\,x^2) \cdot 2x(-\frac{1}{4})\,dx = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}\cos^5 x^2 = -\frac{1}{20}\cos^5 x^2 + c$

b) $\int tg(3x + 2)\,dx = \int \frac{\text{sen}(3x + 2)}{\cos(3x + 2)}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3\text{sen}(3x + 2)}{\cos(3x + 2)}dx = -\frac{1}{3}\ln|\cos(3x + 2) + C|$

12.13 **Calcula las derivadas de $f(x) = tg^2 x$ y $g(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ simplifícalas al máximo y explica qué observas.**

Si $f(x) = tg^2 x$, $f'(x) = 2\,tg\,x \cdot 1\backslash \cos^2 x = \dfrac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$. Si $g(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $g'(x) = \dfrac{-2\cos x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^4 x)} = \dfrac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$

Como se ve, las dos funciones tienen la misma derivada.

No podía ser de otra forma, pues $g(x) - f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1$, es decir, difieren en una constante, por lo que sus derivadas deben ser iguales.

EJERCICIOS

Área bajo una curva

12.14 **Obtén la función $F(x)$: $[0, 5] \to \Re$, tal que $F(x)$ mida el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 < x \leqslant 5 \end{cases}$, el eje horizontal y la vertical que pasa por el punto de abscisa x. Debes distinguir entre $0 \leqslant x \leqslant 2$ y $2 < x \leqslant 5$. Calcula también la derivada de la función $F(x)$.**

Si $x \leqslant 2$, la forma más cómoda de calcular el valor $F(x)$ es restar áreas de triángulos, es decir,

$F(x) = 4 + \dfrac{1}{2}(2 - x)(-2x + 4) = 4 - (2 - x)^2$.

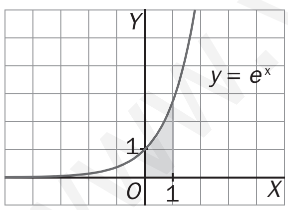
Si $x > 2$, bastará con sumar áreas de triángulos, es decir, $F(x) = 4 - \dfrac{1}{2}(x - 2)(x - 2) = 4 + \dfrac{1}{2}(x - 2)^2$.

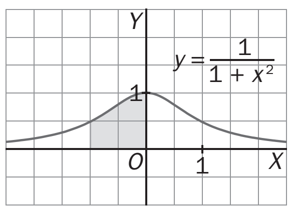
Así pues, $F(x) = \begin{cases} 4 - (2 - x)^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 4 + \dfrac{1}{2}(x - 2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$, por lo que $F'(x) = \begin{cases} 2(2 - x) & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

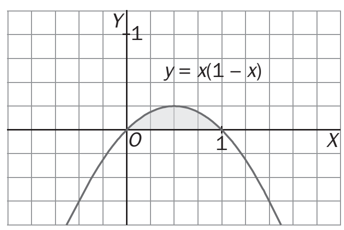
y para ver si existe $F(2)$ y obtenerla bastará calcular $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{F(2 + h) - F(2)}{h}$ y $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{F(2 + h) - F(2)}{h}$ y comprobar que ambos son iguales a 0, por lo que $F'(2) = 0$ y $F'(x) = \begin{cases} 4 - 2x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 < x \leqslant 5 \end{cases}$, es decir, $F'(x) = f(x)$.

Teorema fundamental del cálculo

12.15 **Calcula el área de las siguientes regiones.**

a)


b)


c)


a) $F(x) = e^x$

Área $= F(1) - F(0) = e - 1$

b) $G(x) = arctgx$

Área $= G(0) - G(-1) = 0 - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

c) $H(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3$

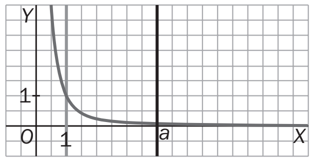
Área $= H(1) - H(0) = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) - 0 = \dfrac{1}{6}$

12.16 **La curva $y = \dfrac{1}{x^2}$ está siempre por encima del eje horizontal. Si nos pidieran calcular el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje horizontal y las verticales $x = -1$ y $x = 3$, procederíamos así: Área $= F(3) - F(-1)$, siendo $F(x) = \dfrac{-1}{x}$ una primitiva de f, ya que $F'(x) = \dfrac{1}{x^2}$, y obtendríamos que el área vale: $F(3) - F(-1) = \dfrac{-1}{3} - \left(\dfrac{-1}{-1}\right) = \dfrac{-4}{3}$, que, al ser negativo, es un número que evidentemente no puede medir un área. ¿Qué hay de erróneo en nuestro razonamiento?**

Como $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ no es continua en $[-1, 3]$, pues no lo es en $x = 0$, no es válido nuestro razonamiento.

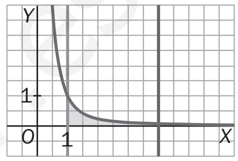
Área entre dos curvas

12.17 **Halla el número a para el que la recta $x = a$ divide en dos partes de igual área la región limitada por el eje horizontal, la curva $y = \frac{1}{x^2}$ y las verticales $x = 1$, $x = 4$.**



Nos piden hallar **a** para que $G(a) - G(1) = G(4) - G(a)$, o sea, $2G(a) = G(1) + G(4)$, siendo $G'(x) = \frac{1}{x^2}$, es decir, $G(x) = -\frac{1}{x}$. Así pues, $\frac{-2}{a} = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$, por lo que $a = \frac{8}{5}$.

12.18 **Halla el número b para el que la recta $y = b$ divide en dos partes de igual área la región del problema anterior.**



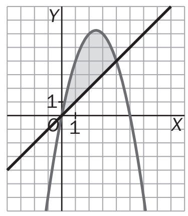
El área en cuestión es $G(4) - G(1)$, siendo $G(x) = -\frac{1}{x}$, es decir, dicha área vale $-\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$, y nos piden hallar b para que el área de la región PQR sea $\frac{3}{8}$.
Las coordenadas del punto R vienen dadas por la solución del sistema $y = \frac{1}{x^2}$, $y = b$, es decir, su abscisa es $\frac{1}{\sqrt{b}}$.

Así pues, $\frac{3}{8} = G\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right) - G(1) -$ Área rectángulo sombreado, o sea: $\frac{3}{8} = -\sqrt{b} + 1 - b\left(\frac{1}{\sqrt{b}} - 1\right) = -2\sqrt{b} + b + 1$, por lo que $2\sqrt{b} - b = \frac{5}{8} \Rightarrow (2\sqrt{b})^2 = \left(\frac{5}{8} + b\right)^2 \Rightarrow b^2 - \frac{11}{4}b + \frac{25}{64} = 0$, de donde se obtienen dos soluciones, $b = \frac{11 \pm 4\sqrt{6}}{8}$, de las que solamente tiene sentido $b = \frac{11 - 4\sqrt{6}}{8} \approx 0{,}15$.

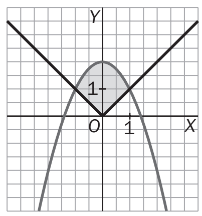
12.19 **En cada caso, calcula el área limitada por las curvas dadas.**

a) $\begin{cases} y = 5x = x^2 \\ y = x \end{cases}$	c) $\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 1 \\ y = -2 \end{cases}$	e $\begin{cases} y = \operatorname{sen} x \\ y = x \cdot (x - \pi);\ x = 2\pi \end{cases}$
b) $\begin{cases} y = \lvert x \rvert \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$	d) $\begin{cases} y = \sqrt{x} \quad y = \frac{1}{x} \\ y = 0 \quad\ x = 2 \end{cases}$	f) $\begin{cases} y = x + 3;\ y = -3x \\ y = x^2 - 2x - 1 \end{cases}$

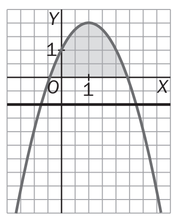
a) Puntos de corte: $5x - x^2 = x \Rightarrow x^2 - 4x = 0$; $x = 0$, $x = 4$
Área $= (F - G)(4) - (F - G)(0)$ con $F'(x) = 5x - x^2$, $G'(x) = x$, así que $(F' - G')(x) = 4x - x^2$ y $T(x) = (F - G)(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$, por lo que el área pedida es:
$T(4) - T(0) = 2 \cdot 4^2 - \frac{1}{3}4^3 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$.



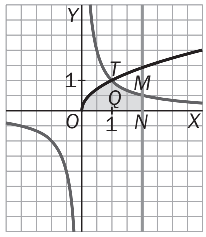
b) Puntos de corte: $2 - x^2 = |x|$ Si $x \geqslant 0$, $2 - x^2 = x$, $x = 1$.
Por la simetría de la figura bastará calcular el área del recinto de la derecha y multiplicar por 2.
Así pues, Área $= 2\,[(F - G)(1) - (F - G)(0)]$ con $F'(x) = 2 - x^2$, $G'(x) = x$, así que $(F' - G')(x) = 2 - x^2 - x$ y $T(x) = (F - G)(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$, por lo que el área pedida es $2\,(T(1) - T(0)) = 2\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{7}{3}$.



c) Puntos de corte: $-x^2 + 2x + 1 = -2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$
Área $= (F - G)(1 + \sqrt{5}) - (F - G)(1 - \sqrt{5})$ con $F'(x) = -x^2 + 2x + 1$, $G'(x) = -2$
Así que $(F' - G')(x) = -x^2 + 2x + 3$ $(F' - G')$ y
$T(x) = F\,(F - G)(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$,
por lo que el área pedida es: $T(1 + \sqrt{5}) - T(1 - \sqrt{5}) = \frac{14\sqrt{5}}{3}$.



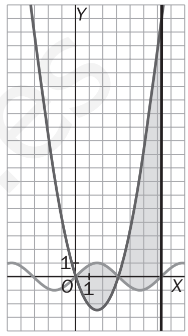
d) Hallamos el punto T como intersección de $y = \sqrt{x}$, $y = \dfrac{1}{x}$ y obtenemos $T(1, 1)$ y sumamos el área de los recintos OTQ y $TQNM$, siendo M el punto $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.



Así pues, Área $(OTQ) = F(1) - F(0)$ con $F'(x) = \sqrt{x}$, es decir, $F(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$, por lo que Área $(OTQ) = \dfrac{2}{3}$.

Área $(TQNM) = G(2) - G(1)$ con $G'(x) = \dfrac{1}{x}$, o sea, $G(x) = \ln x$, por lo que Área $(TQNM) = \ln 2$ y el área pedida será $\dfrac{2}{3} + \ln 2$.

e) Como se observa en la figura, las curvas limitan dos recintos.



En el primero, los puntos de corte son $A(0, 0)$ y $B(\pi, 0)$.

En el segundo son $B(\pi, 0)$ y $C(2\pi, 2\pi^2)$.

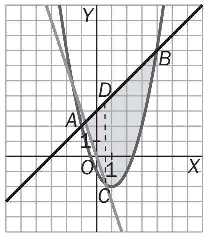
Utilizando la notación de la integral definida y la regla de Barrow, el área del recinto se calcula así:

$$S = \int_0^{\pi} (\operatorname{sen} x - x^2 + \pi x)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (x^2 - \pi x - \operatorname{sen} x)\, dx =$$

$$= \left[-\cos x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{\pi}{2}x^2\right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{\pi}{2}x^2 + \cos x\right]_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= \left(1 - \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{2}\right) - (-1) + \left(\frac{8\pi^3}{3} - 2\pi^3 + 1\right) - \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi^2}{2} - 1\right) = 4 + \pi^3$$

f) Como se observa en la figura, las curvas delimitan varios recintos, pero solamente uno de ellos está limitado por la gráfica de las tres funciones; es el triángulo mixtilíneo ABC, que a su vez se divide en dos recintos: el triángulo ADC y el triángulo mixtilíneo DBC. Se hallan las coordenadas de esos puntos.



$$A: \begin{cases} y = x + 3 \\ y = -3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{El punto buscado es } A\left(-\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right)$$

$$B: \begin{cases} y = x + 3 \\ y = x^2 - 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1,\ y = 2 \\ x = 4,\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow \text{El punto buscado es } B(4, 7).$$

El área del recinto buscado será:

$$2 = \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} [(x+3) - (-3x)]dx + \int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{4} \left[(x+3) - (x^2 - 2x - 1)\right]dx = \left[2x^2 + 3x\right]_{-\frac{3}{4}}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{4}$$

$$= (2\sqrt{5} + 1) + \left(\frac{-11\sqrt{5}}{12} + \frac{71}{4}\right) = \frac{13\sqrt{5}}{12} + \frac{75}{4} = \frac{225 + 13\sqrt{5}}{12} \approx 21{,}17$$

Primitivas. Integral indefinida

12.20 Calcula la función que tiene por derivada $f'(x) = x + 1$ y corta la bisectriz del primer cuadrante en el punto de abscisa -2.

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C$, y como nos dicen que $f(-2) = -2$, tenemos que $-2 = 2 - 2 + C$, es decir, $C = -2$ y la función pedida es $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2$.

12.21 La derivada del producto dice que si $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, entonces $F'=(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Basándonos en esto, podemos calcular la siguiente integral: $\int (2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \operatorname{sen} x)dx = x^2 \cdot \cos x + C$ ya que, en este caso, $f(x) = x^2$ y $g(x) = \cos x$, y la integral es el producto $F(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Identifica las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en los siguientes casos y calcula estas integrales.

a) $\int (2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x)dx$

b) $\int \left(\frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x + (\ln x) \cdot \cos x\right)dx$

c) $\int (e^x \cdot \operatorname{sen} x + e^x \cdot \cos x)dx$

d) $\int (e^x \cdot \operatorname{sen} x - e^x \cdot \cos x)dx$

e) $\int (1 + \ln x)dx$

f) $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx$

a) $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^x$, así que $\int (2xe^x + x^2e^x)dx = \int (x^2 \cdot ex)'dx = x^2 \cdot e^x + C$

b) $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$, por lo que la integral dada es $\int (\ln x \cdot \operatorname{sen} x)'dx = \ln x \cdot \operatorname{sen} x + C$.

c) $f(x) = e^x$, $g(x) = \operatorname{sen} x$, y la integral pedida vale $e^x \operatorname{sen} x + C$.

d) $f(x) = e^x$, $g(x) = -\cos x$, y la integral pedida, $\int (e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x)dx =$

$$= \int (e^x(-\cos x) + e^x \operatorname{sen} x))dx = \int (f'g + fg')dx = f(x) \cdot g(x) = -e^x \cdot \cos x + C$$

e) $\int (1 + \ln x)dx = \int \left(x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x\right)dx = \int (f \cdot g' + f' \cdot g)dx$ con $f(x) = x$, $g(x) = \ln x$,

resultando entonces $f \cdot g = x \ln x + C$.

f) $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx = \int (f'g + fg')dx$ con $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \ln x$,

resultando entonces $f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x}\ln x + C$.

12.22 Calcula una función f que pase por el origen y cuya derivada sea $f'(x) = \sqrt{x} + 2x + \sqrt{x}$.

$f'(x) = x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}}$, por lo que $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + C$, y como pasa por el origen, $C = 0$, siendo entonces $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{4}{5}\sqrt{x^5}$.

12.23 Un estudiante, aunque no sabe obtener la derivada del cociente, dice que las funciones $f(x) = \frac{1}{2x + 1}$ y $g(x) = \frac{2x + 2}{2x + 1}$ tienen la misma derivada, y el profesor dice que está en lo correcto. ¿Cómo ha razonado el alumno?

El estudiante ha observado que $g(x) = \frac{2x + 2}{2x + 1} = \frac{2x + 1}{2x + 1} + \frac{1}{2x + 1} = 1 + f(x)$, por lo que $g'(x) = f'(x)$.

Primitivas inmediatas

12.24 Identifica cada una de las primitivas siguientes con una de la tabla dada en el texto y, a continuación, resuélvelas.

a) $\int\left(\frac{1}{x} + 2\right)dx$

b) $\int \text{tg}\, x\, dx$

c) $\int (3x - 5)^2\, dx$

d) $\int x^3 - \sqrt[4]{x^5}\, dx$

e) $\int \frac{x}{1 + x^4}\, dx$

f) $\int \text{sen}\, 2x\, dx$

g) $\int x \cdot e^{x2}\ dx$

h) $\int \frac{\text{tg}^3 x}{\cos^2 x}\, dx$

i) $\int \frac{x^3 - 5x^2 + 3}{x}\, dx$

j) $\int\left(\text{sen}\, x + \frac{2}{1 + x^2} + \cos x\right)dx$

k) $\int \sqrt{\text{sen}\,(x + 2\pi)}\cos x\, dx$

l) $\int x \cdot \left(x^2 - 1 + \sqrt[3]{x^2 + 1}\right)dx$

m) $\int \frac{\cos x}{1 + \text{sen}^2 x}\, dx$

n) $\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx$

ñ) $\int \frac{\text{sen}\, 2x}{1 + \text{sen}^2 x}\, dx$

o) $\int e^{2x} \cdot \sqrt[7]{e^{2x} + 1}\, dx$

a) $\int\left(\frac{1}{x} + 2\right)dx = \ln|x| + 2x + C$

b) $\int \text{tg}x\, dx = \int \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}\, dx$ (Tipo 2) $= -\int \frac{-\text{sen}\, x}{\cos x}\, dx = -\ln|\cos\ x| + C$

c) $\int (3x - 5)^2\, dx$ (Tipo 1) $= \frac{1}{3}\int (3x - 5)^2 \cdot 3dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x - 5)^3}{3} + C = \frac{1}{9}(3x - 5)^3 + C = \frac{1}{3}\frac{(3x - 5)^3}{3} + C$

d) $\int x^3 \sqrt[4]{x^5}\ dx = \int x^{\frac{17}{4}}\ dx$ (Tipo 1) $= \frac{4}{21}\, x^{\frac{21}{4}} + C = \frac{4}{21}\sqrt[4]{x^{21}} + C = \frac{4}{21}x^5\sqrt[4]{x} + C$

e) $\int \frac{x}{1 + x^4}\, dx = \int \frac{x}{1 + (x^2)^2}\, dx$ (Tipo 9) $= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1 + (x^2)^2}\, dx = \frac{1}{2}\text{arctg}\, x^2 + C$

f) $\int \text{sen}\, 2x\, dx$ (Tipo 6) $= \frac{1}{2}\int 2\,\text{sen}\, 2x\, dx = \frac{1}{2}(-\cos 2x) + C$

g) $\int x \cdot e^{x^2}\, dx$ (Tipo 3) $= \frac{1}{2}\int 2x \cdot e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\, e^{x^2} + C$

h) $\int \frac{\text{tg}^3 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \text{tg}^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$ (Tipo 1) $= \frac{1}{4}\text{tg}^4 x + C$

i) $\int \frac{x^3 - 5x^2 + 3}{x}\, dx = \int x^2\, dx - 5\int x\, dx + 3\int \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3\ln|x| + C$

k) $\int \sqrt{\text{sen}\,(x + 2\pi)}\cos x\, dx = \int (\text{sen}\, x)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos\ x \cdot\ dx = \frac{2}{3}(\text{sen}\ x)^{\frac{3}{2}} + C$

j) $\int\left(\text{sen}\, x + \frac{2}{1 + x^2} + \cos x\right)dx = -\cos x + 2\,\text{arctg}\, x + \text{sen}\, x + C$

l) $\int x(x^2 - 1 + \sqrt[3]{x^2 - 1})\, dx = \int (x^3 - x)\, dx + \int x\sqrt[3]{x^2 - 1} = \int (x^3 - x)\, dx + \int (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}\, x\, dx$, siendo esta última integral del tipo 1, resultando, pues, $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{3}{4} + C = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4} + C.$

m) $\int \frac{\cos x}{1 + \text{sen}^2 x}\, dx$ (Tipo 9) $= \text{arctg}\,(\text{sen}\, x) + C$

n) $\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx = \int (1 + x^2)^{\frac{-1}{2}}\, x\, dx$ (Tipo 1) $= \frac{1}{2}\int (1 + x^2)^{\frac{-1}{2}}\, 2x\, dx = \frac{1}{2}(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 + C = \sqrt{1 + x^2} + C$

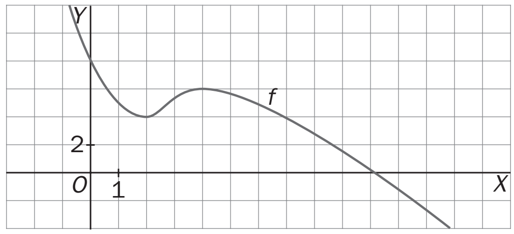
ñ) $\int \frac{\text{sen}\, 2x}{1 + \text{sen}^2 x}\, dx = \int 2\frac{\text{sen}\, x \cos x}{1 + \text{sen}^2 x}\, dx$ (Tipo 2) $= \ln(1 + \text{sen}^2 x) + C$

o) $\int e^{2x}\sqrt[7]{e^{2x} + 1}\, dx = \int (e^{2x} + 1)^{\frac{1}{7}}\, e^{2x}\, dx$ (Tipo 1) $= \frac{1}{2}\int (e^{2x} + 1)^{\frac{1}{7}}\, 2e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}(e^{2x} + 1)^{\frac{8}{7}}\frac{7}{8} + C = \frac{7}{16}\sqrt[7]{(e^{2x} + 1)^8} + C$

Integral definida. Regla de Barrow

12.25 Si la gráfica de $f(x)$ es la de la figura, ¿cuál de los siguientes números es la mejor aproximación para $\int_1^6 f(x)\,dx$?

a) –24 b) 9 c) 26 d) 38



Cada cuadrito de la cuadrícula de la gráfica representa 2 unidades cuadradas. Como hay 13 enteros y varios trozos más, el área supera las 26 unidades, por lo que la respuesta es d) 38.

12.26 Si f' es continua y $f(1) = 2$, ¿cuál es el valor de $f(7)$ sabiendo que $\int_1^7 f'(x)\,dx = 3$?

Al ser $\int_1^7 f'(x)\,dx = f(7) - f(1)$, es $f(7) - 2 = 3$, por lo que $f(7) = 5$.

12.27 Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_1^3 \frac{3x - 1}{\sqrt{x}}\,dx$ b) $\int_0^2 e^{u+3}\,du$ c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec t \cdot \operatorname{tg} t\,dt$ d) $\int_0^4 x \cdot (1 + x^2)^{20}\,dx$

a) $\int_1^3 \frac{3x - 1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x}\right]_1^3 = (6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) - (2 - 2) = 4\sqrt{3}$

b) $\int_0^2 e^{u+3}\,du = [e^{u+3}]_0^2 = e^5 - e^3$

c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec t \cdot \operatorname{tg} t\,dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\,dt = \left[\frac{1}{\cos t}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}$

d) $\int_0^4 x(1 + x^2)^{20}\,dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{21}(1 + x^2)^{21}\right]_0^1 = \frac{1}{42}(2^{21} - 1)$

12.28 (PAU) Calcula $\int_{-\pi}^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx$.

$\int_{-\pi}^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx = 3\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 3\,[-\cos x]_0^{\pi} = 3 \cdot 2 = 6$

12.29 ¿Son verdaderas o falsas estas afirmaciones?

a) Si f es continua y par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)\,dx$.

b) Si f' es continua, entonces $\int_0^7 f'(x)\,dx = f(7) - f(0)$.

c) $\int_0^{\pi} x \cdot \operatorname{sen} x\,dx = 2x$

d) $\int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c)\,dx = 2\int_0^1 (ax^2 + c)\,dx$

e) $\int_0^3 x(x-1)(x-3)\,dx$ mide el área de la región encerrada por la curva $f(x) = x(x - 1)(x - 3)$ y el eje horizontal.

f) El área encerrada por la curva $f(x) = x^2 - 1$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 3$ es 6.

a) Verdadera. Si f es par: $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$, por lo que $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

b) Verdadera. Al ser f' continua, aplicamos la regla de Barrow y $\int_0^7 = f'(x)\,dx = f(7) - f(0)$.

c) Falsa, pues $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\,dx$ es un número.

d) Verdadera. $\int_{-1}^{1}(ax^2 + bx + c)\,dx = \int_{-1}^{1}(ax^2 + c)\,dx + \int_{-1}^{1} bx\,dx$. Al ser la función $y = ax^2 + c$ una función par, el primer sumando es $2\int_{0}^{1}(ax^2 + c)\,dx$, y al ser $y = bx$ una función impar, el segundo sumando es 0.

e) Falsa, ya que la curva $y = x(x - 1)(x - 3)$ cambia de signo en [0, 3].

f) $\int_{0}^{3}(x^2 - 1)\,dx = 6$, pero el área pedida no es esta integral, pues la función $y = x^2 - 1$ cambia de signo en [0, 3].

En concreto, el área pedida es:

$$\int_{0}^{1}(0 - (x^2 - 1)\,dx + \int_{1}^{3}(x^2 - 1)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^3 = \frac{2}{3} + 6 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{22}{3}.$$

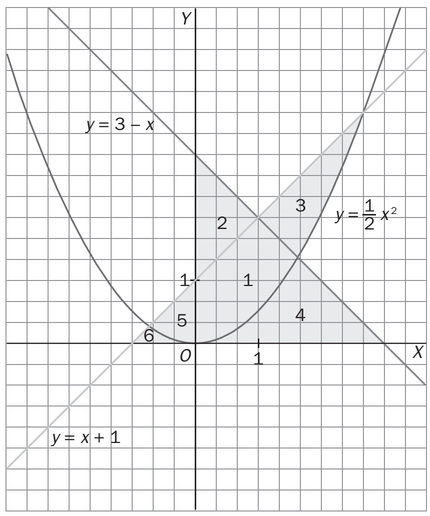
12.30 Solo una de las siguientes integrales no vale cero. ¿Cuál y por qué?

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^3 x\,dx$ c) $\int_{\pi}^{3\pi} \text{sen}\,x\,dx$ e) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx$

b) $\int_{0}^{\pi} \cos x\,dx$ d) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \text{sen}\,x\,dx$ f) $\int_{-1}^{1} \text{tg}\,x\,dx$

La integral del apartado *e* no es cero, pues la función $y = \cos^2 x$ es positiva o cero en R, por lo que $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx$ mide el área de la región encerrada por dicha curva y el eje horizontal entre $-\pi$ y π.

12.31 Calcula el área de las regiones numeradas de 1 a 6 en el siguiente dibujo.



Calcularemos las áreas por trozos.

2) $A_2 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$

1) + 2) + 3) $A_1 + A_2 + A_3 = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$

5) + 6) $A_5 + A_6 = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$

5) $A_5 = \int^{0} \left[(x + 3) - \left(\frac{1}{2}x^2\right)\right] dx = \sqrt{3} - \frac{4}{3}$

6) $A_6 = \frac{1}{2} - \sqrt{3} + \frac{4}{3} = \frac{11}{6} - \sqrt{3}$

5) + 1) + 3) $A_5 + A_1 + A_3 = \int^{1+\sqrt{5}} \left[(x + 3) - \left(\frac{1}{2}x^2\right)\right] dx = 2\sqrt{3}$

4) $A_4 = \int^{1+\sqrt{7}} \left(\frac{1}{2}x^2\right) dx + \int_{-1+\sqrt{7}}^{3} (3 - x)\,dx =$

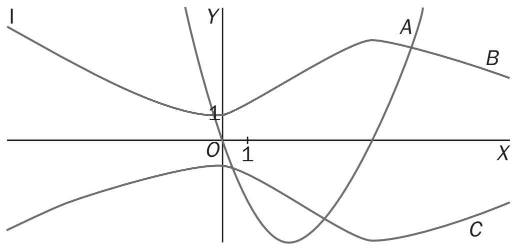
$= \frac{5\sqrt{7}}{3} - \frac{11}{3} + \frac{23}{2} - 4\sqrt{7} = \frac{47}{6} - \frac{7\sqrt{7}}{3}$

$A_1 = \frac{9}{2} - A_2 - A_4 = \frac{9}{2} - 1 - \frac{47}{6} + \frac{7\sqrt{7}}{3} = \frac{7\sqrt{7} - 13}{3}$

$A_3 = 2\sqrt{3} - A_5 - A_1 = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + \frac{4}{3} - \frac{7\sqrt{7} - 13}{3} = \frac{17 + 3\sqrt{3} - 7\sqrt{7}}{3}$

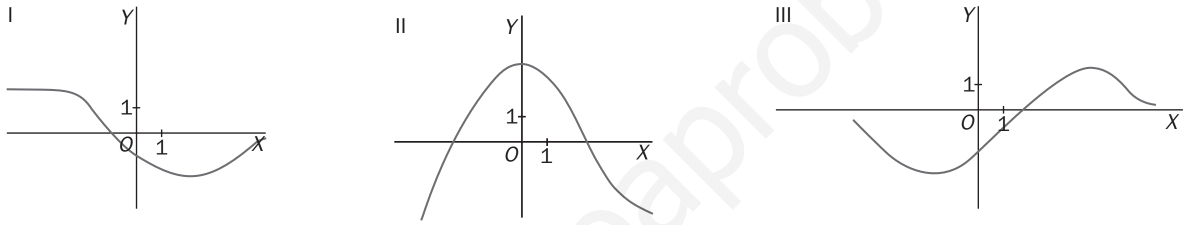
Síntesis

12.32 Considera las tres gráficas de la figura. Si la gráfica *A* es la de cierta función *f*, ¿cuál de las otras dos es la gráfica de una primitiva de *f*?



La *C*, porque cuando esta función decrece, *f* es negativa, y cuando crece, es positiva.

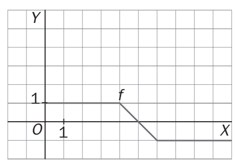
12.33 PAU Las gráficas I, II y III corresponden, no necesariamente por este orden, a las de una función *f* derivable, su función derivada *f′* y una primitiva *F* de *f*. Identifica cada gráfica justificando tu elección.



F es la III, *f* es la II y *f′* es la I, porque cuando *F* crece, *f* es positiva, y cuando *F* decrece, *f* es negativa. Lo mismo ocurre con *f* y *f′*.

12.34 PAU La figura siguiente representa la gráfica de una función *f*: [0, 7] → *R*.

Sea F: [0, 7] → *R* la función definida por $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.



a) Calcula *F*(4) y *F*(7).

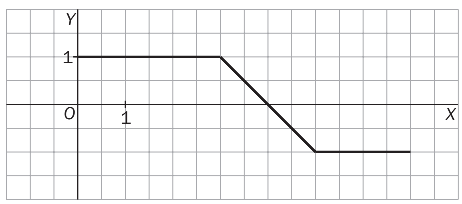
b) Dibuja la gráfica de *F*(*x*) explicando cómo lo haces.

F(4) representa el área comprendida entre la función y los ejes de coordenadas, luego $F(4) = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.
También se podría hacer como:

$$F(4) = \int_0^4 f(t)\,dt = \int_0^3 1\,dt + \int_3^4 (4 - t)\,dt = [t]_0^3 + \left[4t - \frac{1}{2}t^2\right]_3^4 = 3 + 16 - 8 - 12 + \frac{9}{2} = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$$

F(7) representa la suma algebraica de las áreas que delimita la función y el eje *X* en el intervalo [0, 7], pero teniendo en cuenta que una de ellas es positiva y la otra negativa.

$$F(7) = \int_0^4 f(t)\,dt + \int_4^7 f(t)\,dt = \frac{7}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right) = 1$$



12.35 Sea *f* una función continua en el intervalo [−1, 3] y $g(x) = f(x) + 1$.

Si $\int^3 f(t)\,dt = 7$, ¿cuál ha de ser el valor de $\int^3 g(u)\,du = 7$?

$$\int_{-1}^3 g(u)\,du = \int_{-1}^3 (f(u) + 1)\,du = \int_{-1}^3 f(u)\,du + \int_{-1}^3 1\,du = 7 + 4 = 11$$

12.36 Supón que f es una función continua y que $\int_0^1 f(x)\,dx = 2$, $\int_0^2 f(x)\,dx = 1$ y $\int_2^4 f(x)\,dx = 7$.

a) Calcula $\int_0^4 f(x)\,dx$, $\int_1^2 f(x)\,dx$ y $\int_1^4 f(x)\,dx$.

b) Explica por qué f debe ser negativa en algún punto del intervalo [0, 2].

c) Explica por qué $f(x) \geqslant 3{,}5$ para al menos un valor del intervalo [2, 4].

a) $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx = \int_0^4 f(x)\,dx$. Así pues, $\int_0^4 f(x)\,dx = 1 + 7 = 8$

$\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx$. Así pues, $\int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx = 1 - 2 = -1$

$\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^4 f(x)\,dx = \int_0^4 f(x)\,dx$. Así pues, $\int_1^4 f(x)\,dx = \int_0^4 f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx = 8 - 2 = 6$

b) $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$. Así pues, $1 = 2 + \int_1^2 f(x)\,dx$, por lo que $\int_1^2 f(x)\,dx = -1$, de donde deducimos que f debe ser negativa en algunos puntos de [1, 2], pues, en caso contrario, $\int_1^2 f(x)\,dx \geqslant 0$.

c) Si $f(x) < 3{,}5$ para todos los números de [2, 4], entonces $\int_2^4 f(x)\,dx < 3{,}5 \cdot 2 = 7$, lo que contradice el hecho de que $\int_2^4 f(x)\,dx = 7$.

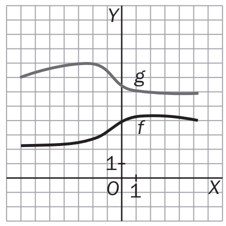
12.37 Si f y g son funciones que admiten derivada segunda y $f(x) \leq g(x)$ para todo x, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones tienen que ser verdaderas?

i) $f'(x) \leq g'(x)$ para todo x ii) $f''(x) \leq g''(x)$ para todo x iii) $\int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 g(x)\,dx$

Las afirmaciones i e ii son falsas como muestra el siguiente diagrama:

$f(a) < g(a)$,pero $f'(a) > g'(a)$ y $f''(a) > 0$ y $g''(a) < 0$, con lo que $f''(a) > g''(a)$

iii es verdadera, pues $(f - g)(x) \leqslant 0$ para todo x, con lo que $\int_0^1 (f - g)(x)\,dx \leqslant 0$, es decir, $\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 g(x)\,dx$.

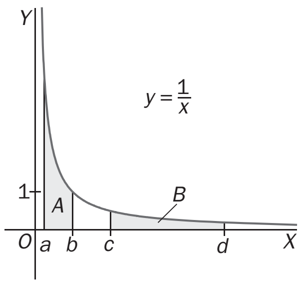


12.38 Si $c = ka$ y $d = kb$, ¿qué número es mayor, A o B?

$$A = \int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}$$

$$B = \int_c^d \frac{1}{x}\,dx = \ln d - \ln c = \ln\frac{d}{c} = \ln\frac{kb}{ka} = A$$

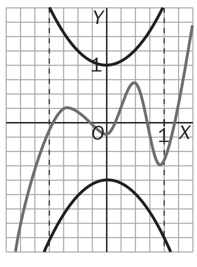
Son iguales.



12.39 PAU De una función f: $[-1, 1] \to R$ se sabe que para cada x de dicho intervalo se cumple que $|f(x)| \leqslant 1 + x^2$. De los números -3, -2, -1, 2,5 y 2,75, ¿cuáles pueden ser el valor de la integral $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$?

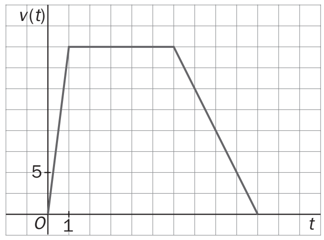
Nos dicen que $-(1 + x^2) \leqslant f(x) \leqslant (1 + x^2)$, es decir, que la gráfica de $f(x)$ presenta una situación como la de la figura.

Como $\int_{-1}^4 (1 + x^2)\,dx = \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}$ y $\int^4 -(1 + x^2)\,dx = -\frac{8}{3}$, nuestra integral $\int_{-1}^4 f(x)\,dx$ debe ser un número comprendido entre estos dos, así que los números que pueden ser el valor de esta integral son -2, -1, 2,5.



PROBLEMAS

12.40 La velocidad de un automóvil ha variado de acuerdo a lo recogido en la siguiente gráfica.



a) Calcula la aceleración del automóvil en cada uno de los tres tramos del recorrido.

b) Calcula el espacio total recorrido por dicho automóvil

Como la aceleración es la derivada de la velocidad, su valor en cada punto viene representado por la pendiente de la gráfica de la función velocidad.

a) En el primer tramo, $a = \dfrac{20}{1} = 20$

En el segundo tramo, de $t = 1$ hasta $t = 6$, la velocidad es constante, luego la aceleración es nula.

En el tercer tramo, desde $t = 6$ hasta $t = 10$, $a = \dfrac{-20}{4} = -5$

b) Como la velocidad es la derivada de la función de posición, esta será una primitiva de la función velocidad, y el espacio total recorrido viene representado por el área del recinto que delimita la función velocidad.

$$e = \int_0^{10} v(t)\,dt = \frac{1 \cdot 20}{2} + 5 \cdot 20 + \frac{4 \cdot 20}{2} = 150$$

12.41 La intensidad de la lluvia caída en un observatorio, en litros por minuto, durante una tormenta se puede representar mediante la función:

$$f(t) = 4(1 - e^{-0{,}1 \cdot t}) \qquad 0 < t < 60 \text{ min}$$

Calcula la cantidad de agua recogida por metro cuadrado en dicho observatorio en la hora que duró la tormenta. [Integra la función $f(t)$ en el intervalo de tiempo pedido.]

Pluviógrafo: aparato que permite registrar la intensidad de precipitación.

$$\int_0^{60} 4(1 - e^{-0{,}1t})\,dt = [4(t + 10e^{-0{,}1t})]_0^{60} = (4(60 + 10e^{-6})) - 4(0 + 10e^0) = 200 + 40e^{-6} \approx 200 \text{ litros por m}^2$$

12.42 Conocida la aceleración con la que se mueve un objeto, es fácil determinar la ecuación de movimiento, esto es, la relación entre la posición del móvil y el tiempo, utilizando el cálculo integral. En el caso del movimiento rectilíneo basta con utilizar las siguientes relaciones.

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(u)\,du; \; x(t) = x_0 + \int_0^t v(u)\,du$$

Donde x_0 y v_0 son, respectivamente, la posición y la velocidad inicial del móvil para $t = 0$.

A partir de estas expresiones, calcula la expresión de la velocidad en función del tiempo y la ecuación de movimiento para el caso de que la aceleración sea constante e independiente del tiempo (movimiento uniformemente acelerado).

Si $a(t) = k$, entonces $v(t) = v_0 + \int_0^t k\,du = v_0 + kt$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + ku)\,du = x_0 + \left[v_0u + k\frac{u^2}{2}\right]_0^t = x_0 + v_0t + k\frac{t^2}{2}$$

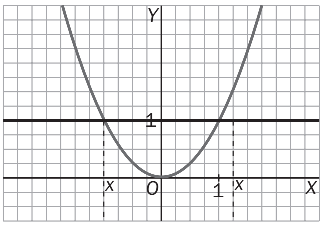
PROFUNDIZACIÓN

12.43 Calcula el valor de a para que $\int_0^a 3x^2\,dx = 2 \cdot \int_a^1 3x^2\,dx$.

Nos dicen que $[x^3]_0^a = 2[x^3]_0^1$, es decir: $a^3 = 2$, $a = \sqrt[3]{2}$

12.44 (PAU) Dos hermanos heredan una parcela que tiene la forma de la región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$. Deciden dividirla en dos regiones de igual área mediante la recta horizontal $y = a$.

Calcula el valor de a.



La situación es como indica la figura y, puesto que el área de la parcela es $\int_{-1}^{1}(1 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}$, nos piden el valor de a para que $\int_{x_0}^{x_1}(a - x^2)\,dx = \frac{2}{3}$.

Determinemos en primer lugar los números x_0, x_1.

$y = x^2$, $y = a$, $x = \pm\sqrt{a}$. Así pues, $\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}(a - x^2)\,dx = \frac{2}{3}$, es decir,

$\int_{0}^{\sqrt{a}}(a - x^2)\,dx = \frac{1}{3}$, o sea, $\left[ax - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{3}$, con lo que $a\sqrt{a} - \frac{1}{3}a\sqrt{a} = \frac{1}{3}$;

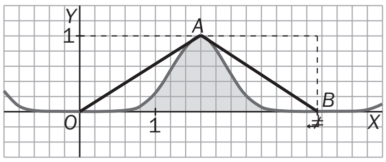
así pues, $2a\sqrt{a} = 1$, $a\sqrt{a} = \frac{1}{2}$, $a^3 = \frac{1}{4}$, $a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

12.45 Encuentra el intervalo $[a, b]$ para el que $\int_a^b (x - x^2)\,dx$ alcanza el máximo valor.

Como $f(x) = x - x^2$, verifica $f(x) < 0$ si $x < 0$, $f(x) < 0$ si $x > 1$ y $f(x) \geqslant 0$ si $x \in [0, 1]$. Resultará que el intervalo buscado $[a, b]$ es $[0, 1]$.

12.46 Cuatro estudiantes no se ponen de acuerdo sobre el valor de $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^8 x\,dx$. Alberto dice que vale π; Beatriz, que es igual a $\frac{35\pi}{128}$; Carolina, que vale $\frac{3\pi}{90} - 1$, y David, que vale $\frac{\pi}{2}$. Uno de los cuatro está en lo cierto, ¿quién?

Si esbozamos la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}^8 x$ en $[0, \pi]$, decidimos rápidamente quién tiene razón.



$\int^{\pi} \operatorname{sen}^8 x\,dx$ mide el área de la región rayada, que es menor que $\frac{\pi}{2}$, pues el área del rectángulo es π, y las rectas OA y AB, aunque comen un poco de la región, claramente dejan gran parte de ella en el interior del triángulo OAB de área $\frac{\pi}{2}$. Así pues, Alberto, que dijo π, no puede tener razón. Carolina dio un resultado negativo. David dijo $\frac{\pi}{2}$, y tampoco tiene razón, porque sabemos que es menor. Luego Beatriz, que dice que dicha integral es $\frac{35\pi}{128} < \frac{\pi}{2}$, es quien tiene razón.

12.47 Calcula las siguientes primitivas.

a) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}\,dx$ c) $\int \sqrt[5]{3 + \operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ e) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,dx$

b) $\int \frac{2^x}{1 + 4^x}\,dx$ d) $\int 2^x\,dx$ f) $\int \frac{1}{1 + 4x^2}\,dx$

a) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}\,dx$ es del tipo $\int e^{f(x)} f'(x)\,dx$, por lo que $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}\,dx = e^{\operatorname{arctg} x} + C$.

b) $\int \frac{2^x}{1 + 4^x}\,dx = \int \frac{2^x}{1 + (2^x)^2}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\ln 2 \cdot 2^x}{1 + (2^x)^2}\,dx$, que es del tipo $\int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}\,dx$, por lo que valdrá $\frac{1}{\ln 2}\operatorname{arctg} 2^x + C$.

c) $\sqrt[5]{3 + \operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (3 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$, que es del tipo $\int f(x)^r f'(x)\,\mathrm{d}x$, con $r \neq -1$, con lo que valdrá $(3 + \operatorname{tg} x)^{\frac{6}{5}} \cdot \frac{5}{6} + C = \frac{5}{6}\sqrt[5]{(3 + \operatorname{tg} x)^6} + C$.

d) $\int 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int \ln 2 \cdot 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}2^x + C$

e) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,dx = -\int \cos^{-3} x\,(-\operatorname{sen} x)\,dx = -\frac{\cos^{-2} x}{-2} = \frac{1}{2\cos^2 x} + C$

f) $\int \frac{1}{1 + 4x^2}\,dx = \int \frac{1}{1 + (2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{1 + (2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + C$

12.48 **Calcula los números A y B para que $\dfrac{1}{(x-1)\cdot(x-2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2}$.**

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}.$$

Como las dos fracciones iguales y también iguales los denominadores, el polinomio $p(x) = A(x-2) + B(x-1)$ debe ser constantemente 1, por lo que $p(2) = 1$, $p(1) = 1$; es decir, $1 = B$, $1 = -A$; luego $A = -1$, $B = 1$.

12.49 **Calcula $\displaystyle\int \frac{3}{x^2 - 3x + 2}\,dx$.**

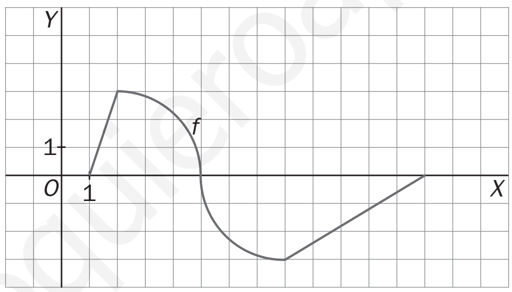
Como $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, según el ejercicio 49,

$\dfrac{3}{x^2-3x+2} = 3\left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}\right)$, por lo que $\displaystyle\int \frac{3}{x^2-3x+2}\,dx = 3\,(\ln|x-2| - \ln|x-1|) + C$.

12.50 **Si b es un número positivo, calcula $\displaystyle\int_0^b |3x|\,dx$.**

En $[0, b]$, $b > 0$, $|3x| = 3x$, por lo que $\displaystyle\int_0^b |3x|\,dx = \int_0^b 3x\,dx = \left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^b = \frac{3b^2}{2}$

12.51 **Sea la función cuya gráfica es la de la figura, que consiste en segmentos y cuartos de circunferencia. Calcula $\displaystyle\int_1^{13} f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_5^{13} f(x)\,dx$ y $\displaystyle\int_2^{8} f(x)\,dx$.**



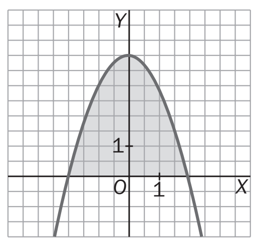
$$\int_1^{13} f(x)\,dx = \int_1^{2} f(x)\,dx + \int_2^{5} f(x)\,dx + \int_5^{8} f(x)\,dx + \int_8^{13} f(x)\,dx = \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\pi - \frac{9}{4}\pi - \frac{15}{2} = -6$$

$$\int_5^{13} f(x)\,dx = \int_5^{8} f(x)\,dx + \int_8^{13} f(x)\,dx = -\frac{9}{4}\pi - \left(\frac{15}{2}\right)$$

$$\int_2^{8} f(x)\,dx = \int_2^{5} f(x)\,dx + \int_5^{8} f(x)\,dx = \frac{9}{4}\pi - \frac{9}{4}\pi = 0$$

12.52 **Dice la experiencia que el área de un segmento parabólico es $\dfrac{2}{3}$ de la longitud de la base multiplicada por la altura. Utiliza el cálculo integral para confirmar esta afirmación.**

Tomemos un sistema de ejes en el que el eje vertical sea el de la parábola, como indica la figura, por lo que la ecuación de la parábola será $y = -ax^2 + c$, siendo entonces la altura del segmento parabólico c, y la base, la longitud del segmento de extremos los cortes de dicha parábola con el eje horizontal, es decir, $-\sqrt{\dfrac{c}{a}}$ y $\sqrt{\dfrac{c}{a}}$, por lo que debemos confirmar que el área de dicho segmento es $\dfrac{2}{3}\,2\sqrt{\dfrac{c}{a}}\cdot c$.



Veámoslo: Área $\displaystyle = 2\int_0^{\sqrt{\frac{c}{a}}} (-ax^2 + c)\,dx = 2\left[-a\frac{x^3}{3} + cx\right]_0^{\sqrt{\frac{c}{a}}} = \frac{-2a}{3}\,\frac{c}{a}\sqrt{\frac{c}{a}} + 2c\sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{c}{a}}\cdot c\left(-\frac{2}{3}+2\right) = \frac{4}{3}\,c\sqrt{\frac{c}{a}}$, como queríamos probar.

12.53 Sea $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x^3 + x}$:

a) Encuentra tres números A, B y C tales que $f(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx + C}{x^2 + 1}$.

b) Esboza la gráfica de f para $x > 0$.

c) Encuentra el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje horizontal y las rectas $x = 1$ y $x = e$.

a) Nos dicen que $\dfrac{2x^2 + 1}{x^3 + x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx + C}{x^2 + 1} = \dfrac{A(x^2 + 1) + (Bx + C)\,x}{x^3 + x}$.

Como sabemos que estas dos fracciones son iguales y los denominadores también lo son, deberían ser iguales los numeradores, así que los polinomios $2x^2 + 1$ y $A(x^2 + 1) + (Bx + C)x$ son el mismo, por lo que tomarán el mismo valor en $x = 0$, es decir, $1 = A$.

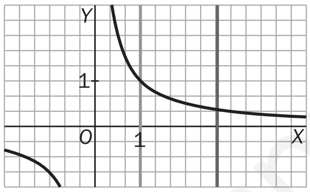
Por ejemplo, tomando $x = -1$ y 1, tenemos $3 = 2A - (C - B)$ y $3 = 2A + C + B$.

Así pues, $\begin{matrix} C - B = -1 \\ C + B = 1 \end{matrix}$, de donde $C = 0$, $B = 1$, por lo que $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x^3 + x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

b) En $(0, \infty)$, f es continua y presenta una asíntota horizontal en $y = 0$.

$$f'(x) = \frac{4x(x^3 + x) - (2x^2 + 1)(3x^2 + 1)}{(x^3 + x)^2} = \frac{-2x^4 - x^2 - 1}{(x^3 + x)^2} < 0 \text{ para todo } x,$$

por lo que la gráfica de f es algo así:

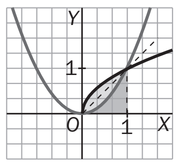


c) $\text{Área} = \displaystyle\int_1^e \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1}\right) dx = \left[\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)\right]_1^e = 1 + \frac{1}{2}\ln(e^2 + 1) - \frac{1}{2}\ln 2 = 1 + \ln\sqrt{\frac{e^2 + 1}{2}}$

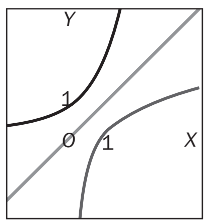
12.54 **Utiliza argumentos geométricos para probar que:**

a) $\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx + \int_0^1 x^{1\backslash n}\,dx = 1$, siendo n cualquier entero positivo.

b) $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx + \int_0^1 e^x\,dx = e$



a) Observando que $f(x) = x^n$ y $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ son una la inversa de la otra, sus gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del 1.er cuadrante, por lo que el número pedido, $\displaystyle\int_0^1 xn\,dx + \int_0^1 x^{\frac{1}{n}}\,dx$, mide la suma de las áreas sombreadas, y como, por las considera– ciones hechas, el área rayada en vertical coincide con el área limitada por la curva $y = x^{\frac{1}{n}}$, el eje y y la recta $y = 1$, la suma pedida es el área del cuadrado de lado 1, es decir, 1.



b) Al ser $y = \ln x$, $y = e^x$ simétricas respecto de la bisectriz del 1.er cuadrante, el número $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$ mide el área de la región limitada por el eje y, la curva $y = e^x$ y la recta $y = e$, por lo que la suma pedida es el área del rectángulo de base 1 y altura e, o sea, e.