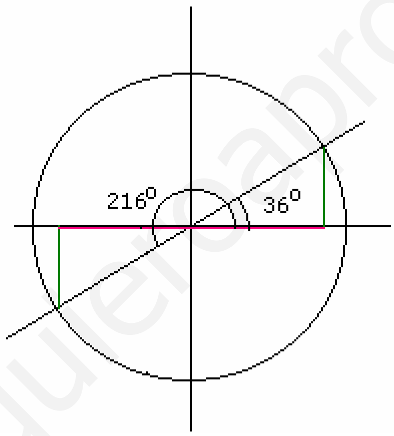
EJERCICIOS RESUELTOS DE TRIGONOMETRÍA

1. Escribir las razones trigonométricas del ángulo de 3456º en función de las de un ángulo positivo menor que 45º.

Solución

Al representar el ángulo de 3456º en la circunferencia unidad, después de haber dado varias vueltas completas a la circunferencia, su segundo lado corresponderá con el segundo lado de un ángulo menor de 360º. Dicho ángulo es el resto obtenido al dividir 3456º entre 360º y el cociente es el número de vueltas que se dan a la circunferencia.
Realizando la división se obtiene que 3456 = 9·360 + 216 y, por tanto, las razones trigonométricas de 3456º coinciden con las de 216º.



Teniendo en cuenta lo anterior y que 216º-180º= 36º o lo que es lo mismo 216º = 180º + 36º se tiene:

sen 3456º = sen 216º = -sen 36º   cos 3456º = cos 216º = -cos 36º

Por otra parte, $\text{tg}\, 3456º = \text{tg}\, 216º = \dfrac{\text{sen } 216º}{\cos 216º} = \dfrac{-\text{sen } 36º}{-\cos 36º} = \text{tg}\, 36º$

2. Sabiendo que cos100º $\simeq$ -0´17, calcular las razones trigonométricas de α = 200º y β = 50º.

Solución

El ángulo de 200º es el doble del ángulo de 100º, por tanto aplicando las fórmulas trigonométricas del ángulo doble se tiene:

sen 200º = 2 sen100º cos100º $\cos 200º = \cos^2 100º - \text{sen}^2 100º$

Para obtener estas razones trigonométricas hay que tener en cuenta que sen100º = $\sqrt{1-\cos^2 100}$ = $= \sqrt{1-(-0´17)^2} \simeq \sqrt{0´9711} \simeq$ 0´9854. Por tanto,

sen 200º = 2 sen100º cos100º $\simeq$ 2 · 0´9854 (-0´17) $\simeq$ -0´3350

$\cos 200º = \cos^2 100º - \text{sen}^2 100º \simeq 0´0289 - 0´9711 = -0´9422$

Conocidos los valores del seno y del coseno se tiene $\text{tg } 200^\circ = \dfrac{\text{sen}\,200^\circ}{\cos 200^\circ} \simeq \dfrac{-0'3350}{-0'9422} \simeq -0'3556$

El ángulo de 50º es la mitad del ángulo de 100º, por tanto aplicando las fórmulas trigonométricas del ángulo mitad se tiene:

$$|\text{sen}50^\circ| = \left|\text{sen}\frac{100^\circ}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos 100^\circ}{2}} \simeq \sqrt{\frac{1-(-0'17)}{2}} = \sqrt{0'585} \simeq 0'7649$$

$$|\cos 50^\circ| = \left|\cos\frac{100^\circ}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos 100^\circ}{2}} \simeq \sqrt{\frac{1-0'17}{2}} = \sqrt{0'415} \simeq 0'6442$$

Se acaban de obtener el valor absoluto del seno y del coseno, ahora es necesario determinar su signo. Al estar el ángulo de 50º en el primer cuadrante todas sus razones trigonométricas son positivas, por tanto:

$\text{sen}50^\circ \simeq 0'7649$, $\cos 50^\circ \simeq 0'6442$ y en consecuencia $\text{tg } 50^\circ = \dfrac{\text{sen}50^\circ}{\cos 50^\circ} \simeq \dfrac{0'7649}{0'6442} \simeq 1'1874$

3. Simplificar las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\text{sen}2\alpha}{\text{tg}\alpha}$ **b)** $\dfrac{\text{tg}(\pi+\alpha)}{\text{tg}(\pi-\alpha)}$ **c)** $\dfrac{\text{sen}^2\alpha\ (1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}$ **d)** $\dfrac{\cos\alpha}{\text{tg}\alpha\ (1-\text{sen}\alpha)}$

Solución

a) $\dfrac{\text{sen}2\alpha}{\text{tg}\alpha} = \dfrac{2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha}{\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = 2\cos^2\alpha$

b) $\dfrac{\text{tg}(\pi+\alpha)}{\text{tg}(\pi-\alpha)} = \dfrac{\text{tg}\alpha}{-\text{tg}\alpha} = -1$

c) $\dfrac{\text{sen}^2\alpha\ (1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha} = \dfrac{(1-\cos^2\alpha)(1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha} = \dfrac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha} = (1+\cos\alpha)^2 \otimes$

En la primera igualdad se ha tenido en cuenta que $\text{sen}^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ y en la segunda se ha aplicado que una diferencia de cuadrados es igual a la suma por la diferencia.

d) $\dfrac{\cos\alpha}{\text{tg}\alpha\ (1-\text{sen}\alpha)} = \dfrac{\cos\alpha}{\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}(1-\text{sen}\alpha)} = \dfrac{\cos^2\alpha}{\text{sen}\alpha(1-\text{sen}\alpha)} = \dfrac{1-\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}\alpha(1-\text{sen}\alpha)} = \dfrac{(1+\text{sen}\alpha)(1-\text{sen}\alpha)}{\text{sen}\alpha(1-\text{sen}\alpha)} = \dfrac{1+\text{sen}\alpha}{\text{sen}\alpha} =$

$= \dfrac{1}{\text{sen}\alpha} + 1$

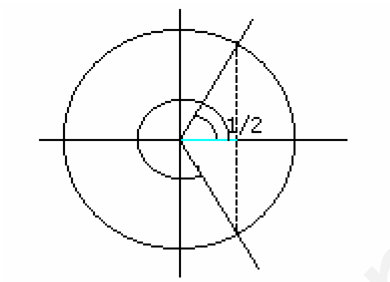
4. Resolver las siguientes ecuaciones: **a)** $\text{sen}2x = \text{sen}x$ **b)** $\dfrac{2}{\text{sen}x} = \dfrac{3}{\cos^2 x}$

Solución

a) Sustituyendo en la ecuación inicial la expresión del seno del ángulo doble, $\text{sen}2x = 2\,\text{sen}x\cos x$, se obtiene la ecuación $2\,\text{sen}x\cos x = \text{sen}x$.

Pasando sen$x$ al primer miembro y sacándolo factor común se obtiene sen$x$ $(2\cos x - 1) = 0$, de donde, sen$x$ = 0 o $2\cos x - 1 = 0$. Resolviéndo cada una de las ecuaciones anteriores se tiene:

- sen$x$ = 0 $\Rightarrow$ $x = k\pi$ con $k \in$ Z.
- $2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$. Los ángulos positivos menores que 360º cuyo coseno es $\frac{1}{2}$ son $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$, por tanto, las soluciones serán esos ángulos y los que se obtienen sumando un número entero de vueltas a la circunferencia.



Por tanto, las soluciones de la ecuación inicial son $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ y $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in$ Z.

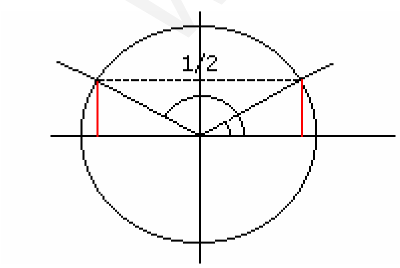
b) Para resolver la ecuación inicial es conveniente que aparezca una única razón trigonométrica, para ello se sustituye $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$, quedando $\frac{2}{\text{sen}x} = \frac{3}{1 - \text{sen}^2 x}$, y pasando todo al primer miembro se obtiene, $\frac{2\left(1 - \text{sen}^2 x\right) - 3\text{sen}x}{\text{sen}x\left(1 - \text{sen}^2 x\right)} = 0$.

Las soluciones serán los valores de x para los que el numerador sea nulo, $2 - 3\text{sen}x - 2\text{sen}^2 x = 0$, y no anulen el denominador, es decir, las que verifiquen sen$x \neq 0$ y $\text{sen}^2 x \neq 1$.

Al ser $2 - 3\text{sen}x - 2\text{sen}^2 x = 0$ una ecuación de segundo grado con incógnita sen$x$ se tiene

$$\text{sen}x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{-4} = \frac{3 \pm 5}{-4} = \begin{cases} -2 \\ 1/2 \end{cases}$$

El valor del seno siempre está entre -1 y 1, por tanto de los dos valores obtenidos, el único a considerar es sen$x = \frac{1}{2}$. (Observar que se verifica sen$x \neq 0$ y $\text{sen}^2 x \neq 1$)

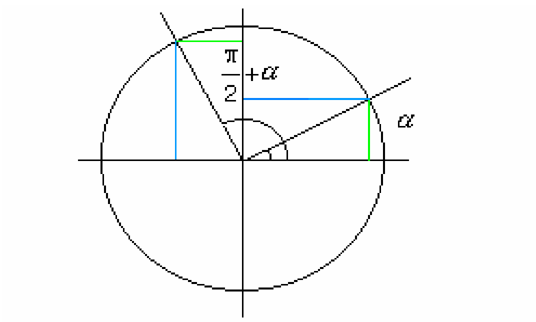


Los ángulos $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$ son los únicos positivos menores que 360º que tienen el seno igual a $\frac{1}{2}$, por tanto, las soluciones serán esos ángulos y los que se obtienen sumando un número entero de vueltas a la circunferencia, es decir, las soluciones son

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ y $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ con $k \in$ Z.

5. Escribir las razones trigonométricas de $\frac{\pi}{2}+\alpha$ en función de las del ángulo α.

Solución



En la figura anterior se observa que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha$$

y en consecuencia $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha} = \frac{-1}{\operatorname{tg}\alpha}$

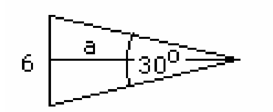
6. Calcular el área de un dodecágono regular cuyo lado mide 6 cm.

Solución

El área de un polígono regular es $\frac{P.a}{2}$ siendo P el perímetro y a el apotema (segmento que une el centro del polígono con el punto medio de un lado).

El perímetro es $P = 12·6 = 72$ cm.

Para calcular el apotema se considera la parte del dodecágono correspondiente a un lado, es un triángulo isósceles cuyo ángulo opuesto al lado del polígono es igual a $\frac{360}{12} = 30º$, y se representa a continuación.



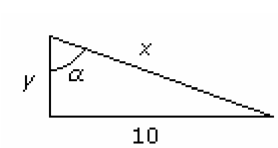
Considerando la mitad de este triángulo isósceles se obtiene el triángulo rectángulo que tiene un cateto igual a 3 y el ángulo opuesto igual a $\frac{30º}{2}=15º$ de donde $\operatorname{tg}15º=\frac{3}{a}$, por tanto, $a = \frac{3}{\operatorname{tg}15º} \simeq \frac{3}{0´2679} \simeq 11’1982$ cm.

Sustituyendo en el área del dodecágono se tiene $A = \frac{P.a}{2} \simeq \frac{72·11'1982}{2} = 403’1352$ cm^2.

7. De un triángulo rectángulo se sabe que un cateto mide 10 cm. y que el ángulo opuesto a dicho cateto tiene por coseno 0´4. Calcular la longitud del otro cateto y de la hipotenusa.

Solución

Se denota x a la longitud de la hipotenusa e y a la longitud del cateto



En la figura se observa que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{10}{x}$ y $\cos\alpha = \frac{y}{x}$.

Al ser $\cos\alpha = 0´4$ se tiene $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-0'16} = \sqrt{0'84} \simeq 0´9165$

y sustituyendo este valor en la igualdad $\operatorname{sen}\alpha = \frac{10}{x}$ queda $0´9165 \simeq \frac{10}{x}$, de donde $x \simeq \dfrac{10}{0'9165} \simeq 10'9111$

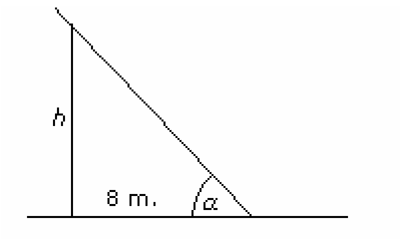
Sustituyendo $\cos\alpha = 0'4$ y $x \simeq 10'9111$ en $\cos\alpha = \dfrac{y}{x}$ queda $0'4 \simeq \dfrac{y}{10'9111}$ y despejando se tiene

$y \simeq 0'4 \cdot 10'9111 = 4'3644$.

Así, aproximadamente la longitud del cateto es 4´3644 cm. y la de la hipotenusa 10´9111 cm.

8. Calcular la altura de una torre sabiendo que proyecta una sombra de 8 m. cuando los rayos de sol inciden sobre la tierrra con un ángulo cuya tangente es 1´6351.

Solución



Llamando h a la altura de la torre y observando la figura se tiene $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{h}{8}$ y como $\mathrm{tg}\alpha = 1'6351$ igualando queda $\dfrac{h}{8} = 1'6351$, de donde $h = 8.\ 1'6351 = 13'0808$ m.