Apuntes de Trigonometría

Índice general

Capítulo 1

Fórmulas de Adición

Sean a y b dos ángulos cualesquiera. Se nos plantea el problema del cálculo del seno, coseno y tangente del ángulo suma, $a+b$, conociendo el seno, el coseno y la tangente de los ángulos a y b.

1.1. Razones trigonométricas del ángulo suma

1.1.1. Seno del ángulo suma

En una primera aproximación podría pensarse que

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$$

Comprobamos con el siguiente contraejemplo que esta conjetura es falsa:

$$\operatorname{sen}(60^{\circ} + 30^{\circ}) \neq \operatorname{sen} 60^{\circ} + \operatorname{sen} 30^{\circ}$$

Efectivamente, el valor del primer miembro es

$$\operatorname{sen}(60^{\circ} + 30^{\circ}) = \operatorname{sen} 90^{\circ} = 1$$

mientras que al segundo miembro corresponde un valor numérico diferente:

$$\operatorname{sen} 60^{\circ} + \operatorname{sen} 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

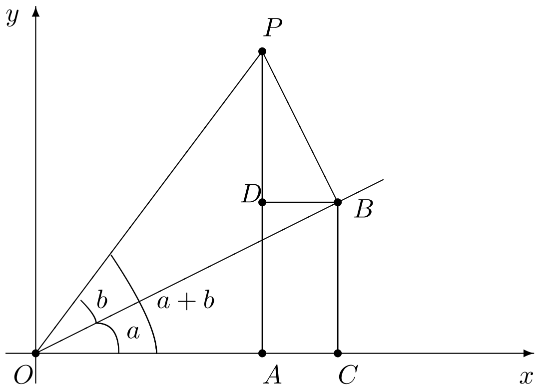
La pregunta es evidente: ¿cuál es el valor del $sen(a+b)$?.

Para encontrar la respuesta debemos comenzar por la construcción geométrica del ángulo suma: *Colóquese el ángulo a en posición normal, es decir, haciendo coincidir su vértice con el origen de coordenadas y situando el lado inicial sobre el eje OX.Después, el ángulo b de tal manera que su vértice caiga en O y su lado inicial sobre el lado final del ángulo a, como se refleja en la figura 1.1*

Del triángulo OPA se deduce:

$$sen(a+b) = \frac{AP}{OP} = \frac{AD+DP}{OP} = \frac{AD}{OP} + \frac{DP}{OP} = \frac{BC}{OP} + \frac{DP}{OP} \tag{1.1}$$

Representación gráfica del ángulo suma.



Sea P un punto cualquiera del lado final del ángulo $a+b$.

Trácense los segmentos siguientes:

$\overline{PA}\perp\overline{OX}$ $\quad\overline{PB}\perp\overline{OB}$ $\quad\overline{BC}\perp\overline{OX}$ $\quad\overline{BD}\perp\overline{PA}$

Entonces, $\widehat{APB}=a$ porque sus lados correspondientes (OA y PA , OB y PB) son perpendiculares.

Figura 1.1: Ángulo suma de los ángulos a y b.

Ahora bien, del triángulo rectángulo BOC se deduce que $BC = OB\cdot\operatorname{sen} a$, y en el triángulo BPD, que también es rectángulo, se observa cómo $DP = PB\cdot\cos a$.

Utilizando estos resultados en la expresión 1.1, tendremos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a+b) &= \frac{AP}{OP}=\frac{AD+DP}{OP}=\frac{AD}{OP}+\frac{DP}{OP}=\frac{BC}{OP}+\frac{DP}{OP}=\\
&= \frac{OB\cdot\operatorname{sen} a}{OP}+\frac{PB\cdot\cos a}{OP}=\\
&= \frac{OB}{OP}\cdot\operatorname{sen} a+\frac{PB}{OP}\cdot\cos a=\\
&= \cos b\cdot\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b\cdot\cos a
\end{aligned}$$

que se obtiene, evidentemente, a partir del triángulo rectángulo OPB.

En definitiva,

$$\boxed{\mathit{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\cdot\cos b+\cos a\cdot\operatorname{sen} b} \tag{1.2}$$

Ejercicio 1 *Comprueba esta fórmula con los datos del contraejemplo inicial, es decir, halla*

$$\operatorname{sen}(60^o+30^o)$$

1.1.2. Coseno del ángulo suma

De forma análoga, a partir de la figura 1.1, puedes deducir que

$$\cos(a+b)=\frac{OA}{OP}=\frac{OC-AC}{OP}=\frac{OC}{OP}-\frac{AC}{OP}=\frac{OC}{OP}-\frac{DB}{OP}$$

Ahora bien, del triángulo rectángulo BOC se deduce que $OC = OB \cdot \cos a$, y en el triángulo BPD, que también es rectángulo, se observa cómo $DB = PB \cdot \operatorname{sen} a$.

Con lo cuál

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \frac{OC}{OP} - \frac{DB}{OP} = \frac{OB\cdot\cos a}{OP} - \frac{PB\cdot\operatorname{sen} a}{OP} = \\ &= \frac{OB}{OP}\cdot\cos a - \frac{PB}{OP}\cdot\operatorname{sen} a = \\ &= \cos a\cdot\cos b - \operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b\end{aligned}$$

que se obtiene, evidentemente, a partir del triángulo rectángulo OPB.

En definitiva,

$$\boxed{cos(a+b) = \cos a\cdot\cos b - \operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b} \tag{1.3}$$

Ejercicio 2 *Observando que* $75^o = 45^o + 30^o$*, comprueba que* $\operatorname{sen} 75^o = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ *y* $\cos 75^o = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. *Compara estos resultados con los proporcionados por la calculadora científica.*

1.1.3. Tangente del ángulo suma

Recordando que la tangente de un ángulo puede obtenerse como el cociente entre el seno y el coseno de dicho ángulo, y utilizando las fórmulas obtenidas para el seno y el coseno del ángulo suma, se deduce con facilidad que

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\operatorname{sen} a\cdot\cos b + \cos a\cdot\operatorname{sen} b}{\cos a\cdot\cos b - \operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b}$$

Pero esta expresión presenta un pequeño inconveniente, pues para calcular la tangente de una suma de dos ángulos, necesitaríamos conocer tanto el seno como el coseno de dichos ángulos. Por esta razón, nos planteamos la posibilidad de encontrar otra en la que intervengan, únicamente, las tangentes. Para conseguirlo, aplicaremos el principio fundamental de las fracciones:*al dividir los dos términos de una fracción por una misma expresión no nula, se obtiene otra fracción equivalente.*

Vamos a dividir el numerador y el denominador de la expresión anterior por el producto $\cos a \cdot \cos b$:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(a+b) &= \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\operatorname{sen} a\cdot\cos b + \cos a\cdot\operatorname{sen} b}{\cos a\cdot\cos b - \operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b} = \\ &= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a\cdot\cos b + \cos a\cdot\operatorname{sen} b}{\cos a\cdot\cos b}}{\dfrac{\cos a\cdot\cos b - \operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b}{\cos a\cdot\cos b}} = \\ &= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b} + \dfrac{\cos a\cdot\operatorname{sen} b}{\cos a\cdot\cos b}}{\dfrac{\cos a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b} - \dfrac{\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b}{\cos a\cdot\cos b}} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a\cdot\operatorname{tg} b}\end{aligned}$$

Finalmente, la tangente del ángulo suma viene dada por

$$\boxed{tg(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}} \tag{1.4}$$

Ejercicio 3 *Calcula de dos formas* $\operatorname{tg} 75^o$. *Debes obtener* $\operatorname{tg} 75^o = 2 + \sqrt{3}$.

Ejercicio 4 *Dos ángulos,* α *y* β*, difieren en* π *si* $\beta - \alpha = \pi$. *Por tanto, dado* α*, el ángulo que difiere en* π *es* $\pi + \alpha$.

1. *Utiliza las fórmulas 1.2 y 1.3 para demostrar que* $\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$ *y* $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$.
2. *Expresando la tangente como cociente entre seno y coseno, demuestra que* $\pi + \alpha$ *y* α *tienen la misma tangente.*
3. *Emplea los resultados obtenidos para calcular los valores exactos de las razones trigonométricas directas de 240º.*
4. *Con la circunferencia trigonométrica (*centro en el origen de coordenadas y radio unidad*), intenta dar una interpretación geométrica.*
5. *¿Hay más razones trigonométricas de* $\pi + \alpha$ *que coincidan con la de* α*?.*
6. *Halla los valores exactos de las razones trigonométricas de* 225^o*, comparando con los resultados que proporciona la calculadora científica.*

1.2. Razones trigonométricas del ángulo diferencia

Recuerda que entre dos ángulos opuestos, α y $-\alpha$, existen las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha, \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

Ejercicio 5 *Resuelve las siguientes cuestiones relativas a ángulos* ***opuestos****:*

1. *Realiza una interpretación geométrica.*
2. *¿Cuál será la expresión correspondiente a* $\operatorname{tg}(-\alpha)$*?.*
3. *Halla los valores exactos de las razones trigonométricas directas de* 330^o.
4. *Si* $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$*, ¿a qué cuadrante pertenece* $-\alpha$*?.*
5. *Demostrar que* $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$, $\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec} \alpha$ *y* $\sec(-\alpha) = \sec \alpha$.
6. *Calcula los valores exactos de las razones de* 315^o.

1.2.1. Seno del ángulo diferencia

Si en la fórmula 1.2 expresamos $a-b=a+(-b)$ y aplicamos las razones trigonométricas de ángulos opuestos, obtenemos:

$$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}(a+(-b))=\operatorname{sen}a\cdot\cos(-b)+\cos a\cdot\operatorname{sen}(-b)=\operatorname{sen}a\cdot\cos b-\cos a\cdot\operatorname{sen}b$$

En definitiva,

$$\boxed{sen(a-b)=\operatorname{sen}a\cdot\cos b-\cos a\cdot\operatorname{sen}b} \tag{1.5}$$

1.2.2. Coseno del ángulo diferencia

Si en la fórmula 1.3 aplicamos el mismo razonamiento, obtendremos:

$$\cos(a-b)=\cos(a+(-b))=\cos a\cdot\cos(-b)-\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}(-b)=\cos a\cdot\cos b+\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b$$

En definitiva,

$$\boxed{cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b} \tag{1.6}$$

1.2.3. Tangente del ángulo diferencia

Aplicando el mismo procedimiento a la fórmula 1.4, resulta que

$$\operatorname{tg}(a-b)=\operatorname{tg}(a+(-b))=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}(-b)}{1-\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}(-b)}=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b}$$

Finalmente,

$$\boxed{tg(a-b)=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b}} \tag{1.7}$$

Ejercicio 6 *Expresando* 15^o *como diferencia de dos ángulos cuyas razones se conocen exactamente, comprobar que* $\operatorname{sen}15^o=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 15^o=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ *y* $\operatorname{tg}15^o=2-\sqrt{3}$.

Ejercicio 7 *Dos ángulos,* α *y* β*, se llaman* ***suplementarios*** *si sumados valen un llano, es decir, si* $\alpha+\beta=\pi$*. Por consiguiente,dado* α*,su suplementario será* $\pi-\alpha$.

1. *Utiliza las fórmulas 1.5 y 1.6 para demostrar que* $\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$ *y* $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$.
2. *Expresando la tangente como cociente entre seno y coseno, demuestra que* $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$.
3. *Con la circunferencia trigonométrica (*centro en el origen de coordenadas y radio unidad*), intenta dar una interpretación geométrica.*
4. *Demostrar que* $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$, $\operatorname{cosec}(\pi-\alpha)=\operatorname{cosec}\alpha$ *y* $\sec(\pi-\alpha)=-\sec\alpha$.
5. *Hallar los valores exactos de las razones directas de* 135^o *y* 150^o.

Ejercicio 8 *Dos ángulos, α y β, se llaman* ***complementarios*** *si suman un recto, es decir, si $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. Por tanto, son complementarios α y $\frac{\pi}{2}-\alpha$.*

1. *Utiliza las fórmulas 1.5 y 1.6 para demostrar que* $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$ *y* $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$.
2. *Expresando la tangente como cociente entre seno y coseno, demuestra que* $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$.
3. *Con la circunferencia trigonométrica (*centro en el origen de coordenadas y radio unidad*), intenta dar una interpretación geométrica.*
4. *Demostrar que* $\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cosec}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sec\alpha$ *y* $\sec(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\operatorname{cosec}\alpha$.
5. *Simplificar la expresión*

$$\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cdot\operatorname{cosec}(\frac{\pi}{2}-\alpha).$$

Ejercicio 9 *De forma análoga, realiza el estudio de las relaciones entre las razones trigonométricas de los siguientes pares de ángulos : α y $\frac{\pi}{2}+\alpha$, α y $\frac{3\pi}{2}+\alpha$, α y $\frac{3\pi}{2}-\alpha$, α y $2\pi+\alpha$*

1.2.4. Reglas prácticas

En cada momento necesario podrás aplicar las *fórmulas de adición*, sin embargo, si recuerdas las siguientes reglas adelantarás en la resolución de ejercicios :

- Cuando intervienen $\pi\pm\alpha$ o $2\pi\pm\alpha$, se compara cada razón trigonométrica consigo misma.
- Si los ángulos que intervienen son $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ o $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, las razones cambian de seno a coseno, de tangente a cotangente, y recíprocamente.
- Para los signos, basta fijarse en qué cuadrantes están los dos ángulos relacionados.

1.2.5. Excepciones

En el segundo apartado del Ejercicio 8 encontramos la expresión para $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ en función del ángulo α. Te proponemos ahora que intentes obtener esta expresión, pero utilizando la fórmula 1.7. ¿Has detectado el problema?. ¿A qué se debe?.

Recuerda que en una de las etapas para deducir la fórmula 1.4, tuvimos que dividir por la expresión $\cos a\cdot\cos b$. Pero el principio para conseguir fracciones equivalentes, requiere que esa expresión sea no nula. Ahora bién, en nuestro caso, como $a=\frac{\pi}{2}$, entonces $\cos a\cdot\cos b=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos b=0$, y, en consecuencia, la fórmula 1.4 no es aplicable en este caso. ¿Existirán más excepciones?.

Observa que

$$\cos a\cdot\cos b=0\Leftrightarrow\cos a=0 \text{ o } \cos b=0\Leftrightarrow a=(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2} \text{ o también } b=(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}$$

En definitiva, las fórmulas que proporcionan $\operatorname{sen}(a \pm b)$ y $\cos(a \pm b)$ son aplicables cualesquiera que sean los valores de los ángulos a y b. Sin embargo, las fórmulas para $\operatorname{tg}(a \pm b)$ no pueden emplearse cuando alguno de los ángulos es un múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$. En estos casos, deberá expresarse la tangente como el cociente entre seno y coseno. Además, las fórmulas para $\operatorname{tg}(a \pm b)$ tampoco se pueden utilizar cuando $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b = \pm 1$. ¿Por qué?.

Ejercicio 10 *Demostrar que*

$$\frac{\operatorname{tg}(a+b) - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}(a+b) \cdot \operatorname{tg} a} = \operatorname{tg} b$$

Capítulo 2

Fórmulas para los ángulos doble y mitad

2.1. Razones trigonométricas del ángulo doble

Se nos plantea el cálculo de las razones trigonométricas del ángulo doble conociendo las del ángulo sencillo.

Teniendo en cuenta que $2a = a+a$, basta con aplicar las fórmulas de adición estudiadas en el capítulo anterior:

$$\operatorname{sen} 2a = \operatorname{sen}(a+a) = \operatorname{sen} a \cdot \cos a + \cos a \cdot \operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$$

Análogamente:

$$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a \cdot \cos a - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} a = (\cos a)^2 - (\operatorname{sen} a)^2 = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$

$$\operatorname{tg} 2a = \operatorname{tg}(a+a) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} a} = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - (\operatorname{tg} a)^2} = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

Resumiendo:

- Seno del ángulo doble:
$$\boxed{\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a} \tag{2.1}$$
- Coseno del ángulo doble:
$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a} \tag{2.2}$$
- Tangente del ángulo doble:
$$\boxed{\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}} \tag{2.3}$$

Ejercicio 11 *¿En qué casos no será aplicable la fórmula 2.3?.*

Ejercicio 12 *Observando que $120^o = 2 \cdot 60^o$, calcula los valores exactos de las razones trigonométricas directas del ángulo 120^o.*

Ejercicio 13 *Aplicando las fórmulas del ángulo doble, y sin utilizar calculadora, obtener el valor de:*

1. $\cos^2 15^o - \operatorname{sen}^2 15^o$
2. $\cos^2 22^o30' - \operatorname{sen}^2 22^o30'$
3. $2 \operatorname{sen} 15^o \cos 15^o$

Ejercicio 14 *Simplificar las siguientes expresiones:*

1. $2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$
2. $2 \operatorname{sen} \frac{a}{4} \cos \frac{a}{4}$
3. $\cos^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$

Ejercicio 15 *Demostrar que*

$$\cos 2a = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 a = 2 \cos^2 a - 1$$

2.2. Razones trigonométricas del ángulo mitad

Se llama ángulo mitad de a el ángulo $\frac{a}{2}$.

Según la *fórmula fundamental de la Trigonometría*, $\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} = 1$.

Por otra parte, puesto que $a = 2 \cdot \frac{a}{2}$, según el coseno del ángulo doble, tendremos que

$$\cos a = \cos 2 \cdot \frac{a}{2} = \cos^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

Con las dos últimas expresiones planteamos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcl}\cos^2\frac{a}{2} & + & \operatorname{sen}^2\frac{a}{2} & = & 1\\ \cos^2\frac{a}{2} & - & \operatorname{sen}^2\frac{a}{2} & = & \cos a\end{array}\right\}$$

que resuelto por reducción, nos proporciona

$$\left.\begin{array}{rcrcl}\cos^2\frac{a}{2} & + & \operatorname{sen}^2\frac{a}{2} & = & 1\\ \cos^2\frac{a}{2} & - & \operatorname{sen}^2\frac{a}{2} & = & \cos a\end{array}\right\}$$

$$2\cos^2\frac{a}{2} = 1+\cos a$$

y despejando

$$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{2} \Rightarrow \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

Cambiando de signo la segunda ecuación del sistema, se tiene:

$$\left.\begin{array}{rcrcl}\cos^2\frac{a}{2} & + & \operatorname{sen}^2\frac{a}{2} & = & 1\\ -\cos^2\frac{a}{2} & + & \operatorname{sen}^2\frac{a}{2} & = & -\cos a\end{array}\right\}$$

$$2\operatorname{sen}^2\frac{a}{2} = 1-\cos a$$

y despejando

$$\operatorname{sen}^2\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$

Partiendo de estos resultados, es fácil obtener la expresión para la tangente del ángulo mitad

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{1-\cos a}{2}}{\frac{1+\cos a}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

Resumiendo:

- Seno del ángulo mitad:

$$\boxed{\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}} \tag{2.4}$$

- Coseno del ángulo mitad:

$$\boxed{\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}} \tag{2.5}$$

- Tangente del ángulo mitad:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}} \tag{2.6}$$

OBSERVACIÓN El doble signo, obtenido al despejar el cuadrado, queda determinado cuando se conoce el cuadrante al que pertenece el ángulo $\frac{a}{2}$.

Ejercicio 16 *Teniendo en cuenta que* $22^o30' = \frac{45^o}{2}$, *comprueba que*

$$\operatorname{sen} 22^o30' = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

y

$$\cos 22^o30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Ejercicio 17 *Obtener el valor exacto de* $\operatorname{sen} 292^o30'$.

Capítulo 3

Transformación de sumas y diferencias en producto

Para poder simplificar conviene, en muchas ocasiones, transformar una suma o diferencia en producto o viceversa.

3.1. Sumas y diferencias de senos

Partimos de las expresiones 1.2 y 1.5 para construir el siguiente sistema de ecuaciones, que resolveremos por reducción

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \operatorname{sen} a \cdot \cos b & + & \cos a \cdot \operatorname{sen} b & = & \operatorname{sen}(a+b) \\ \operatorname{sen} a \cdot \cos b & - & \cos a \cdot \operatorname{sen} b & = & \operatorname{sen}(a-b) \end{array}\right\}$$

$$2 \operatorname{sen} a \cdot \cos b = \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)$$

Designemos por A y B la suma y diferencia de los ángulos a y b, respectivamente, es decir:

$$\left.\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & A \\ a & - & b & = & B \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{A+B}{2}, b = \frac{A-B}{2}$$

que sustituyendo en la expresión obtenida trás la reducción del sistema, nos queda:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

Procediendo de forma análoga en el sistema inicial, pero aplicando la otra reducción, encontramos

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \operatorname{sen} a \cdot \cos b & + & \cos a \cdot \operatorname{sen} b & = & \operatorname{sen}(a+b) \\ -\operatorname{sen} a \cdot \cos b & + & \cos a \cdot \operatorname{sen} b & = & -\operatorname{sen}(a-b) \end{array}\right\}$$

$$2 \cos a \cdot \operatorname{sen} b = \operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)$$

que, en función de A y B, se convierte en

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

Resumiendo:

- Suma de senos:

$$\boxed{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} \tag{3.1}$$

- Diferencia de senos:

$$\boxed{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}} \tag{3.2}$$

Ejercicio 18 *Sin calculadora, hallar el valor de:*

1. $\operatorname{sen} 75^o + \operatorname{sen} 15^o$
2. $\operatorname{sen} 10^o + \operatorname{sen} 50^o$
3. $\operatorname{sen} 50^o - \operatorname{sen} 10^o$

3.2. Sumas y diferencias de cosenos

Usando un razonamiento similar, es decir, partiendo de las fórmulas 1.3 y 1.6, y construyendo el sistema

$$\left.\begin{array}{ccccc} \cos a \cdot \cos b & - & \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b & = & \cos(a+b) \\ \cos a \cdot \cos b & + & \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b & = & \cos(a-b) \end{array}\right\}$$

deberás deducir las fórmulas que transforman en producto una suma y una diferencia de cosenos:

- Suma de cosenos:

$$\boxed{\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} \tag{3.3}$$

- Diferencia de cosenos:

$$\boxed{\cos A - \cos B = -2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}} \tag{3.4}$$

Ejercicio 19 *Transformar en producto* $\cos 3a + \cos a$*.*

Ejercicio 20 *Demostrar que*

$$\frac{\operatorname{sen} 4a + \operatorname{sen} 2a}{\cos 4a + \cos 2a} = \operatorname{tg} 3a$$

Ejercicio 21 *Utilizar las fórmulas que transforman sumas en productos para demostrar que*

$$\operatorname{sen} 105^o + \cos 75^o = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Ejercicio 22 *Comprobar que*

1. $\operatorname{sen} 75^o \cdot \cos 15^o = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$
2. $\cos 135^o \cdot \cos 15^o = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{4}$

Ejercicio 23 *¿Cómo transformar en producto una suma o diferencia de tangentes?*

Capítulo 4

Ecuaciones trigonométricas

4.1. Generalidades

Se conocen como ecuaciones trigonométricas aquellas que contienen razones trigonométricas de ángulos desconocidos. Por ejemplo, en $\operatorname{sen} x = 0$ buscamos ángulos que tengan seno cero. Una **solución particular** es un valor del ángulo que satisface la ecuación. Así, dos soluciones particulares de la ecuación anterior son $x_1 = 0$ y $x_2 = \pi$. Ahora bién, cuando una ecuación dada tiene una solución, tendrá, en general, un conjunto infinito de soluciones. En el ejemplo anterior, el conjunto de soluciones o **solución general** viene dado por:

$$x_1 = 0 + 2k\pi, x_2 = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Al resolverlas, tendremos en cuenta que a cada ángulo le corresponde un valor único para cada razón trigonométrica, sin embargo, puede haber infinitos ángulos con la misma razón. Será de gran utilidad recordar que, en el primer giro:

Tienen el mismo seno α y $\pi - \alpha$, ya que $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$, como vimos en el Ejercicio 7

Tienen el mismo coseno α y $2\pi - \alpha$, ya que $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$

Tienen la misma tangente α y $\pi + \alpha$, pues $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$, como vimos en el Ejercicio 4

Para resolver una ecuación trigonométrica, en primer lugar, la reduciremos a una de los tipos seno, coseno o tangente, y seguiremos las instrucciones que se recogen en la siguiente tabla:

	TIPO SENO	**TIPO COSENO**	**TIPO TANGENTE**
Ecuación	$\operatorname{sen} x = a$	$\cos x = a$	$\operatorname{tg} x = a$
Solución particular	$\alpha\ rad$	$\alpha\ rad$	$\alpha\ rad$
Solución general	$x_1 = \alpha + 2k\pi$ $x_2 = \pi - \alpha + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	$x_1 = \alpha + 2k\pi$ $x_2 = 2\pi - \alpha + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	$x_1 = \alpha + 2k\pi$ $x_2 = \pi + \alpha + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

OBSERVACIONES

- Las soluciones particulares se localizan en el primer giro.
- Si la solución particular se expresa en grados sexagesimales, debemos sustituir el sumando $2k\pi$ por $k \cdot 360^{\circ}$.

- Existen ecuaciones trigonométricas incompatibles. Por ejemplo, $\operatorname{sen} x = 2$. ¿Por qué?.

Ejemplo 1 *Resolver la ecuación trigonométrica*

$$1 - 2\cos x = 0$$

Se recomienda proceder de la siguiente forma:

1. *Para reducirla a uno de los tipos, es suficiente con despejar la única razón trigonométrica que aparece:*
$$\cos x = \frac{1}{2}$$
2. *Para encontrar la solución particular, observaremos que hay dos ángulos con el coseno positivo, uno en el primer cuadrante y otro en el cuarto. Obviamente, el del primer cuadrante es 60^o.*
3. *La solución general, en grados sexagesimales, viene dada por*
$$\begin{gathered} x_1 = 60^o + k \cdot 360^o \\ x_2 = 360^o - 60^o + k \cdot 360^o = 300^o + k \cdot 360^o \\ k \in \mathbb{Z} \end{gathered}$$

Observa que 300^o es el ángulo del cuarto cuadrante con coseno $\frac{1}{2}$.

La solución general puede expresarse, también, en radianes, según convenga o se nos pida. En este caso
$$\begin{gathered} x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{gathered}$$

Ejemplo 2 *Resolver la ecuación trigonométrica*

$$1 + \operatorname{sen} x = 0$$

Seguimos el mismo procedimiento del ejemplo anterior:

1. *Despejamos la única razón que aparece*
$$\operatorname{sen} x = -1$$
2. *Para buscar la solución particular, en este caso, observamos que existe un único ángulo del primer giro con seno -1, que es $\alpha = \frac{3\pi}{2}$*
3. *La solución general de la ecuación es*
$$\begin{gathered} x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{gathered}$$

Ejemplo 3 *Resolver la ecuación trigonométrica*

$$1 - \operatorname{tg} x = 0$$

Despejando la razón trigonométrica nos queda

$$\operatorname{tg} x = 1$$

y vemos que hay dos ángulos con tangente positiva, uno en el primer cuadrante, $\frac{\pi}{4}$*, y otro en el tercero, que será* $\pi + \frac{\pi}{4}$*. Por consiguiente, la solución general de esta ecuación viene dada por*

$$\begin{gathered} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x_2 = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{gathered}$$

Ejemplo 4 *Resolver la ecuación trigonométrica*

$$1 - 3\operatorname{tg}^2 x = 0$$

Despejando la razón trigonométrica resulta

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

En este ejemplo tendremos que resolver dos ecuaciones del tipo tangente:

Primera ecuación. $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. *Hay dos ángulos con tangente positiva, uno en el primer cuadrante,* $\alpha = 30^o$*, y otro en el tercero,* $180^o + \alpha = 180^o + 30^o = 210^o$.

Segunda ecuación. $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. *Existen dos ángulos con tangente negativa, uno en el segundo cuadrante,* $\alpha = 150^o$*, y otro en el cuarto,* $180^o + \alpha = 180^o + 150^o = 330^o$.

Por tanto, la solución general de la ecuación viene dada por

$$\left.\begin{array}{r} x_1 = 30^o + k\cdot 360^o \\ x_2 = 150^o + k\cdot 360^o \\ x_3 = 210^o + k\cdot 360^o \\ x_4 = 330^o + k\cdot 360^o \end{array}\right\} k \in \mathbb{Z}$$

La solución general expresada en radianes sería

$$\left.\begin{array}{r} x_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \\ x_2 = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \\ x_3 = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ \\ x_4 = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right\} k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 5 *Resolver la ecuación trigonométrica*

$$4\operatorname{sen}^2 x - 3 = 0$$

Despejando la razón trigonométrica resulta

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

En este ejemplo tendremos que resolver dos ecuaciones del tipo seno:

Primera ecuación. $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. *Hay dos ángulos con seno positivo, uno en el primer cuadrante,* $\alpha = 60^o$, *y otro en el segundo,* $180^o - \alpha = 180^o - 60^o = 120^o$.

Segunda ecuación. $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Existen dos ángulos con seno negativo, uno en el tercer cuadrante,* $\alpha = 240^o$, *y otro en el cuarto,* 300^o.

Por tanto, la solución general de la ecuación viene dada por

$$\left.\begin{array}{r} x_1 = 60^o + k\cdot 360^o \\ x_2 = 120^o + k\cdot 360^o \\ x_3 = 240^o + k\cdot 360^o \\ x_4 = 300^o + k\cdot 360^o \end{array}\right\} k \in \mathbb{Z}$$

La solución general expresada en radianes sería

$$\left.\begin{array}{r} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \\ x_2 = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \\ x_3 = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ \\ x_4 = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right\} k \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 24 *Demostrar que la solución general de una ecuación trigonométrica del tipo tangente,*

$$\operatorname{tg} x = a$$

puede expresarse en la forma $x = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ *y* α *es una solución del primer giro.*

4.2. Métodos de resolución

No existe un método general para resolver las ecuaciones trigonométricas, no obstante daremos algunos **procedimientos** que pueden servir de modelo.

La ecuación puede descomponerse en factores. Resolver la ecuación

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x = 0$$

Aplicamos la fórmula del seno del ángulo doble y factorizamos:

$$\operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0$$

$$\operatorname{sen} x \cdot (1 - 2\cos x) = 0$$

Recordando que un producto es cero cuando alguno de sus factores lo es, nos quedan dos opciones:

- $\operatorname{sen} x = 0$, cuyas soluciones en el primer giro son $x = 0$ y $x = \pi$.
- $1 - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$, que tiene por soluciones particulares $x = \dfrac{\pi}{3}$ y $x = \dfrac{5\pi}{3}$

En consecuencia, la solución general en radianes viene expresada por:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2k\pi \\ x_2 &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_3 &= \pi + 2k\pi \\ x_4 &= \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned}\right\} k \in \mathbb{Z}$$

Expresar las razones en términos de una sola y hacer un cambio de variables. Resolver la ecuación trigonométrica

$$2\cos^2 x = 3(1 - \operatorname{sen} x)$$

Utilizando la *fórmula fundamental de la Trigonometría*, podemos expresar la ecuación únicamente en términos de $\operatorname{sen} x$:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

que sustituido en nuestra ecuación resulta:

$$2\cos^2 x = 3(1-\operatorname{sen} x) \Leftrightarrow 2(1-\operatorname{sen}^2 x) = 3(1-\operatorname{sen} x) \Leftrightarrow -2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 1 = 0$$

Haciendo el *cambio de variables* $\operatorname{sen} x = t$ obtenemos la ecuación de segundo grado $2t^2 - 3t + 1 = 0$, cuyas soluciones son $t_1 = 1$ y $t_2 = \frac{1}{2}$. Deshaciendo el *cambio* nos quedan dos opciones:

- $\operatorname{sen} x = 1$, cuya solución en el primer giro es $x = \dfrac{\pi}{2}$.
- $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$, que tiene por soluciones particulares $x = \dfrac{\pi}{6}$ y $x = \dfrac{5\pi}{6}$

En consecuencia, la solución general en radianes viene expresada por:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned}\right\} k \in \mathbb{Z}$$

Elevar al cuadrado los dos miembros de la ecuación. Resolver la ecuación trigonométrica

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 1 \tag{4.1}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación y aplicando la *fórmula fundamental de la Trigonometría*, llegaremos a:

$$\operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \cos x = 0$$

Recordando, nuevamente, que un producto es cero cuando alguno de sus factores lo es, nos quedan dos opciones:

- $\operatorname{sen} x = 0$, cuyas soluciones en el primer giro son $x = 0$ y $x = \pi$.
- $\cos x = 0$, que tiene por soluciones particulares $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$

Ahora bien, debemos tener en cuenta que al elevar al cuadrado ambos miembros de una ecuación, no se obtiene otra equivalente, por lo que se hace necesario realizar la comprobación para determinar si se han introducido *soluciones extrañas*. Sustituyendo los cuatro valores de x en la ecuación 4.1, comprobaremos que se verifica para $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$, en consecuencia, la solución general en radianes viene expresada por:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2k\pi \\ x_2 &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned}\right\} k \in \mathbb{Z}$$

Ecuaciones con ángulos múltiplos. Resolver la ecuación trigonométrica

$$\operatorname{sen} 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

En este tipo de ecuaciones hay que tener presente que buscamos las soluciones particulares en el primer giro, es decir, en grados sexagesimales, $x \in [0^o, 360^o)$. Por lo tanto, el ángulo triple hay que localizarlo en los tres primeros giros, o sea, $3x \in [0^o, 1080^o)$. Así, los valores posibles para el ángulo triple son

$$3x = 45^o, 135^o, 405^o, 495^o, 765^o, 855^o$$

y, finalmente, las soluciones de la ecuación en el primer giro son:

$$x = 15^o, 45^o, 135^o, 165^o, 255^o, 285^o$$