Tema 6. Trigonometría (II)

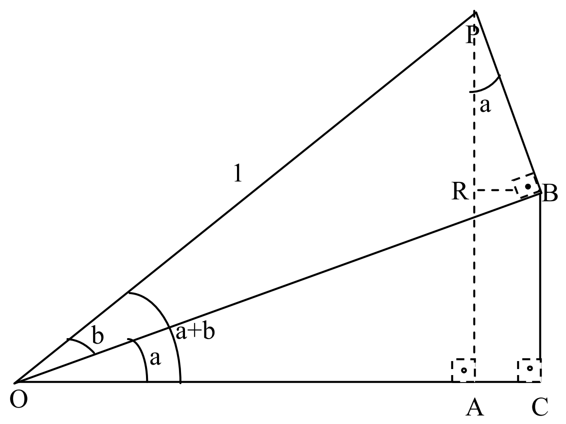
1. Teorema de adición

1.1. Razones trigonométricas de la suma de dos ángulos.

Muchas veces es de utilidad poder calcular las razones trigonométricas de una suma de ángulos a partir de conocer las razones trigonométricas de los ángulos independientes.

El objetivo del apartado es expresar las razones sen(a+b), cos(a+b)y tg(a+b) en función de sen(a), sen(b), cos(a), cos(b), tg(a), tg(b).

Para calcularlo utilizaremos la siguiente figura:



$$sen(a+b)=AP=AR+RP=CB+RP$$
$$\cos(a+b)=OA=OC-AC=OC-RB$$

Notas: Se cumple que el ángulo ∠COB=∠RPB al ser sus lados rectas perpendiculares.

$$sen(a)=\frac{CB}{OB}\rightarrow CB=OB\cdot sen(a)$$
$$sen(a)=\frac{RB}{PB}\rightarrow RB=PB\cdot sen(a)$$
$$\cos(a)=\frac{RP}{PB}\rightarrow RP=PB\cdot \cos(a)$$
$$\cos(a)=\frac{OC}{OB}\rightarrow OC=OB\cdot \cos(a)$$
$$sen(b)=\frac{PB}{1}\rightarrow PB=sen(b)$$
$$\cos(b)=\frac{OB}{1}\rightarrow OB=\cos(b)$$

Con estas igualdades fácilmente relacionaremos el seno y coseno de la suma de dos ángulos con las razones simples:

$$sen(a+b)=sen(a)\cdot\cos(b)+\cos(a)\cdot sen(b)$$
$$\cos(a+b)=\cos(a)\cdot\cos(b)-sen(a)\cdot sen(b)$$

Para calcular la tangente dividamos seno y coseno:

$$tg(a+b)=\frac{sen(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{sen(a)\cdot\cos(b)+\cos(a)\cdot sen(b)}{\cos(a)\cdot\cos(b)-sen(a)\cdot sen(b)}\underbrace{=}_{\substack{dividiendo\\ num\ y\ den\ por\\ \cos(a)\cos(b)}}\frac{\dfrac{sen(a)\cdot\cos(b)+\cos(a)\cdot sen(b)}{\cos(a)\cdot\cos(b)}}{\dfrac{\cos(a)\cdot\cos(b)-sen(a)\cdot sen(b)}{\cos(a)\cdot\cos(b)}}=$$

$$=\frac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a)\cdot tg(b)}$$

Reagrupando los resultados:

$$sen(a+b)=sen(a)\cdot\cos(b)+\cos(a)\cdot sen(b)$$
$$\cos(a+b)=\cos(a)\cdot\cos(b)-sen(a)\cdot sen(b)$$
$$tg(a+b)=\frac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a)\cdot tg(b)}$$

1.2. Razones trigonométricas de la diferencia de dos ángulos.

A partir de las razones trigonométricas de la suma es sencillo calcular las razones de la diferencia. Sólo hay que relacionar sen(-b) y cos(-b) con sen(b) y cos(b). Pero –b=360-b, y en el tema anterior vimos (hacer dibujo circunferencia goniométrica):

sen(-b)=sen(360-b)=-sen(b)

cos(-b)=cos(360-b)=cos(b)

tg(-b)=tg(360-b)=-tg(b)

De esta forma:

sen(a-b)=sen(a+(-b))=sen(a)·cos(-b)+cos(a)·sen(-b)=sen(a)·cos(b)-cos(a)·sen(b)

cos(a-b)=cos(a+(-b))=cos(a)·cos(-b)+sen(a)·sen(-b)=cos(a)cos(b)+sen(a)·sen(b)

$$tg(a-b)=tg(a+(-b))=\frac{tg(a)+tg(-b)}{1-tg(a)\cdot tg(-b)}=\frac{tg(a)-tg(b)}{1+tg(a)\cdot tg(b)}$$

Resumiendo:

$$sen(a-b)=sen(a)\cdot\cos(b)-\cos(a)\cdot sen(b)$$
$$\cos(a-b)=\cos(a)\cdot\cos(b)+sen(a)\cdot sen(b)$$
$$tg(a-b)=\frac{tg(a)-tg(b)}{1+tg(a)\cdot tg(b)}$$

Ejercicio1: calcular las razones trigonométricas de 75 º y 15º a partir de las razones de 30º, 60º y 45º. Comprueba los resultados calculando las razones trigonométricas de 90º a partir de las razones de 15º y 75º.

$$sen(75^o)=sen(45^o+30^o)=sen(45)\cdot\cos(30)+\cos(45)\cdot sen(30)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(75^o)=\cos(45^o+30^o)=\cos(45)\cdot\cos(30)-sen(45)\cdot sen(30)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$tg(75^o)=tg(45^o+30^o)=\frac{tg(45)+tg(30)}{1-tg(45)\cdot tg(30)}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=2+\sqrt{3}$$

$$sen(15^o)=sen(45^o-30^o)=sen(45)\cdot\cos(30)-\cos(45)\cdot sen(30)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(15^o)=\cos(45^o-30^o)=\cos(45)\cdot\cos(30)+sen(45)\cdot sen(30)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$tg(15^o)=tg(45^o-30^o)=\frac{tg(45)-tg(30)}{1+tg(45)\cdot tg(30)}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=2-\sqrt{3}$$

$$sen(90^o)=sen(75^o+15^o)=sen(75)\cdot\cos(15)+\cos(75)\cdot sen(15)=\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2=$$

$$=\frac{6+2+2\sqrt{12}+6+2-2\sqrt{12}}{16}=\frac{16}{16}=1$$

$$\cos(90^o)=\cos(75^o+15^o)=\cos(75)\cdot\cos(15)-sen(75)\cdot sen(15)=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)-$$

$$-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=0$$

$$tg(90^o)=tg(75^o+15^o)=\frac{tg(75)+tg(15)}{1-tg(75)\cdot tg(15)}=\frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{1-(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\frac{4}{0}=\infty$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

2. Razones trigonométricas del ángulo doble y mitad.

2.1. Razones trigonométrica del ángulo doble

En este apartado buscamos expresar las razones trigonométricas del ángulo doble, 2a, en función de el ángulo a.

Para calcularlo utilizamos las razones trigonométricas de la suma:

$$sen(2a) = sen(a+a) = sen(a)\cdot\cos(a) + \cos(a)\cdot sen(a) = 2\cdot sen(a)\cdot\cos(a)$$

$$\cos(2a) = \cos(a)\cdot\cos(a) - sen(a)\cdot sen(a) = \cos^2(a) - sen^2(a)$$

$$tg(2a) = \frac{tg(a)+tg(a)}{1-tg(a)\cdot tg(a)} = \frac{2\cdot tg(a)}{1-tg^2(a)}$$

Resumiendo:

$$sen(2a) = 2\cdot sen(a)\cdot\cos(a)$$
$$\cos(2a) = \cos^2(a) - sen^2(a)$$
$$tg(2a) = \frac{2\cdot tg(a)}{1-tg^2(a)}$$

2.2. Razones trigonométrica del ángulo mitad

En este apartado buscamos expresar las razones trigonométricas del ángulo mitad, a/2, en función de el ángulo a.

Para calcularlo utilizaremos la razón trigonométrica del coseno del ángulo doble:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x) = 1 - sen^2(x) - sen^2(x) = 1 - 2sen^2(x) \rightarrow sen(x) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{2}}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x) = \cos^2(x) - \left(1-\cos^2(x)\right) = 2\cos^2(x) - 1 \rightarrow \cos(x) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(2x)}{2}}$$

Llamando 2x=a → x=a/2

$$sen\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{2}}$$
$$\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(a)}{2}}$$
$$tg\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{1+\cos(a)}}$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 2: calcular las razones trigonométricas de 120º a partir de las razones trigonométricas de 60º.

$$sen(120)=sen(2\cdot 60)=2\cdot sen(60)\cdot\cos(60)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(120)=\cos(2\cdot 60)=\cos^2(60)-sen^2(60)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$tg(120)=tg(2\cdot 60)=\frac{2\cdot tg(60)}{1-tg^2(60)}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{-2}=-\sqrt{3}$$

Ejercicio 3: calcular las razones trigonométricas de 22.5º a partir de las razones trigonométricas de 45º.

$$sen(22.5)=sen(45/2)=\sqrt{\frac{1-\cos 45}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos(22.5)=\cos(45/2)=\sqrt{\frac{1+\cos 45}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$tg(22.5)=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$

Nota: hemos cogido las soluciones positivas al pertenece 22.5º al primer cuadrante, y por tanto ser sus razones trigonométricas positvas.

Ejercicio 4:

a) poner sen(3a) en función de sen(a)

$$sen(3a)=sen(2a+a)=sen(2a)\cdot\cos(a)+\cos(2a)\cdot sen(a)=$$
$$=2\cdot sen(a)\cdot\cos(a)\cdot\cos(a)+\left(\cos^2(a)-sen^2(a)\right)sen(a)=$$
$$=2\cdot sen(a)\cdot\cos^2(a)+\cos^2(a)\cdot sen(a)-sen^3(a)=3\cdot\cos^2(a)\cdot sen(a)-sen^3(a)$$
$$=3\cdot(1-sen^2(a))\cdot sen(a)-sen^3(a)=3\cdot sen(a)-4\cdot sen^4(a)$$

b) poner cos(3a) en función de cos(a)

$$\cos(3a)=\cos(2a+a)=\cos(2a)\cdot\cos(a)-sen(2a)\cdot sen(a)=$$
$$=\left(\cos^2 a-sen^2 a\right)\cos(a)-2\cdot sen(a)\cdot\cos(a)\cdot sen(a)=$$
$$=\cos^3 a-3sen^2(a)\cdot\cos(a)=\cos^3 a-3\cdot(1-\cos^2(a))\cdot\cos(a)=$$
$$=-3\cos(a)+4\cos^3(a)$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

c) poner sen(4a) en función de sen(a)

$$sen(4a) = sen(2\cdot 2a) = 2\cdot sen(2a)\cdot\cos(2a) = 2\cdot(2sen(a)\cdot\cos(a))\cdot(\cos^2(a) - sen^2(a)) =$$
$$= 4sen(a)\cdot\cos(a)(1 - 2\cdot sen^2(a)) = 4\cdot sen(a)\cdot\sqrt{1 - sen^2(a)}(1 - 2\cdot sen^2(a))$$

3. Transformaciones de sumas de dos razones trigonométricas en productos.

En este apartado vamos a ver como trasformar la suma o diferencia de dos razones trigonométricas en un producto de 2 razones trigonométricas. Para este objetivo partimos de las ya conocidas razones trigonométricas del seno y coseno de la suma y diferencia:

(1) $sen(a+b) = sen(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot sen(b)$

(2) $sen(a-b) = sen(a)\cdot\cos(b) - \cos(a)\cdot sen(b)$

(1)+(2) → $sen(a+b) + sen(a-b) = 2\cdot sen(a)\cdot\cos(b)$

(1)-(2) → $sen(a+b) - sen(a-b) = 2\cdot\cos(a)\cdot sen(b)$

Como el objetivo es que sean los argumentos de las razones trigonométricas sumadas conocidos se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=A \\ a-b=B \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{l} a=\dfrac{A+B}{2} \\ b=\dfrac{A-B}{2} \end{array}\right\}$$

De esta forma:

$$\boxed{\begin{array}{l} sen(A) + sen(B) = 2\cdot sen\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right) \\ sen(A) - sen(B) = 2\cdot\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cdot sen\left(\dfrac{A-B}{2}\right) \end{array}}$$

Vamos a ver la suma y diferencia de cosenos:

(1) $\cos(a+b) = \cos(a)\cdot\cos(b) - sen(a)\cdot sen(b)$

(2) $\cos(a-b) = \cos s(a)\cdot\cos(b) + sen(a)\cdot sen(b)$

(1)+(2) → $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cdot\cos(a)\cdot\cos(b)$

(1)-(2) → $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\cdot sen(a)\cdot sen(b)$

Haciendo el cambio de variable:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(A) + \cos(B) = 2\cdot\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right) \\ \cos(A) - \cos(B) = -2\cdot sen\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cdot sen\left(\dfrac{A-B}{2}\right) \end{array}}$$

Ejercicio5: Calcular sin calculadora sen(75º)+sen(15º), sen(75º)-sen(15º), cos(75)+cos(15), cos(75)-cos(15)

$$sen(75)+sen(15)=2\cdot sen\left(\frac{75+15}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{75-15}{2}\right)=2\cdot sen(45)\cdot\cos(30)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$sen(75)-sen(15)=2\cdot\cos\left(\frac{75+15}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{75-15}{2}\right)=2\cdot sen(30)\cdot\cos(45)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(75)+\cos(15)=2\cdot\cos\left(\frac{75+15}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{75-15}{2}\right)=2\cdot\cos(45)\cdot\cos(30)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\cos(75)-\cos(15)=-2\cdot sen\left(\frac{75+15}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{75-15}{2}\right)=-2\cdot sen(45)\cdot sen(30)=-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejercicio 6: Calcular sen(45+a)+sen(45-a), cos(120+a)+cos(60+a), cos(270-a)-cos(90-a):

$$sen(45+a)+sen(45-a)=2\cdot sen(45)\cdot\cos(a)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos(a)=\sqrt{2}\cos(a)$$

$$\cos(120+a)+\cos(60+a)=2\cdot\cos(90+a)\cdot\cos(30)=2\cdot\cos(90+a)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\cos(90+a)=-\sqrt{3}sen(a)$$

$$\cos(270-a)-\cos(90-a)=-2\cdot sen(180-a)\cdot sen(90)=-2\cdot sen(180-a)=-2\cdot sen(a)$$

Ejercicio 7: Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{sen(5a)-sen(3a)}{cos(5a)+cos(3a)}$

$$\frac{sen(5a)-sen(3a)}{\cos(5a)+\cos(3a)}=\frac{2\cdot\cos(4a)\cdot sen(a)}{2\cdot\cos(4a)\cdot\cos(a)}=tg(a)$$

b) $\frac{sen(9a)+sen(a)}{cos(9a)-cos(a)}$

$$\frac{sen(9a)+sen(a)}{\cos(9a)-\cos(a)}=\frac{2\cdot sen(5a)\cdot\cos(4a)}{-2\cdot sen(5a)\cdot sen(4a)}=-\cot g(4a)$$

c) $\frac{cos(x-y)-cos(x+y)}{sen(x+y)+sen(x-y)}$

$$\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{sen(x+y)+sen(x-y)}=\frac{-2\cdot sen(x)\cdot sen(-y)}{2\cdot sen(x)\cdot\cos(y)}=tg(y)$$

4. Ecuaciones trigonométricas

En el tema anterior hemos resulto ecuaciones trigonométricas en los que los argumentos que aparecían en todas la razones eran el mismo. En este tema resolveremos las ecuaciones cuando aparece en las razones diferentes argumentos. Los objetivos para resolver las ecuaciones son los siguientes:

1. Tendremos que buscar factorizar las razones trigonométricas igualadas a cero. Para esto se utiliza el teorema de la suma o diferencia, y especialmente el teorema de la adicción
2. A partir de los teoremas del ángulo doble o mitad y las ecuación $sen^2(x)+cos^2(x)=1$ poner todas las razones en función de un única razón trigonométrica con mismo argumento.

Ejemplos:

a) sen(2x)+cos(x)=0.

No podemos aplicar el teorema de adicción, pues no hay para la suma de seno y coseno. Pongamos sen(2x) con razones trigonométricas de argumento x:

2·sen(x)·cos(x)+cos(x)=0

Como está la ecuación igualdad a cero podemos factorizar:

$\cos(x)\cdot(2sen(x)+1)=0 \rightarrow \begin{cases} \cos(x)=0 \\ 2\cdot sen(x)+1=0 \end{cases}$

1) $\cos(x)=0 \rightarrow x=\begin{cases} 90+360k \\ 270+360k \end{cases}$

2) $2\cdot sen(x)+1=0 \rightarrow sen(x)=-1/2 \rightarrow x=\begin{cases} -30=330+360k \\ 210+360k \end{cases}$

b) sen(4x)-sen(2x)=0.

Ahora si podemos aplicar el teorema de adicción, además como está igualado a cero será fácil resolver la ecuación.

$sen(4x)-sen(2x)=0 \rightarrow 2\cdot\cos(3x)\cdot.sen(x)=0 \rightarrow \begin{cases} \cos(3x)=0 \\ sen(x)=0 \end{cases}$

1) $\cos(3x)=0 \rightarrow 3x=\begin{cases} 90+360k \\ 270+360k \end{cases} \rightarrow x=\begin{cases} 30+120k \\ 90+120k \end{cases}=\begin{cases} 30^\circ+360^\circ k \\ 150^\circ+360^\circ k \\ 270^\circ+360^\circ k \\ 90^\circ+360^\circ k \\ 210^\circ+360^\circ k \\ 330^\circ+360^\circ k \end{cases}$

2) $sen(x)=0 \rightarrow x=\begin{cases} 0+360k \\ 180+360k \end{cases}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

c) $\cos(2x)-\text{sen}(x)=\text{sen}^2(x)$

Tenemos que buscar tener el mismo argumento, de forma que pondremos cos(2x) como razones trigonométricas de argumento x:

$\cos(2x)-\text{sen}(x)=\text{sen}^2(x) \rightarrow \cos^2(x)-\text{sen}^2(x)-\text{sen}(x)=\text{sen}^2(x) \rightarrow \cos^2(x)-2\text{sen}^2(x)-\text{sen}(x)=0$

Para que la ecuación esté en función de una misma razón trigonométrica podremos $\cos^2 x$ en función del seno: $\cos^2(x)=1-\text{sen}^2(x)$

$1-\text{sen}^2(x)-2\text{sen}^2(x)-\text{sen}(x)=0 \rightarrow -3\cdot\text{sen}^2 x-\text{sen}(x)+1=0 \rightarrow \text{sen}(x)=\begin{cases} 0{,}43 \\ -0{,}77 \end{cases}$

1) $sen(x)=0{,}43 \rightarrow x=\begin{cases} 25{,}7+360k \\ 154{,}3+360k \end{cases}$

2) $\text{sen}(x)=-0.77 \rightarrow x=\begin{cases} -50{,}1=309.9+360k \\ 230{,}1+360k \end{cases}$

d) $\text{sen}(x)+\cos(x)=1$

Pongamos sen(x) en función de cos(x) (o al revés)$\rightarrow sen(x)=\sqrt{1-cos^2 x}$

$\sqrt{1-cos^2 x}+\cos(x)=1 \rightarrow$cambio variable $\cos(x)=y$ $\rightarrow \sqrt{1-y^2}+y=1 \rightarrow \sqrt{1-y^2}=1-y \rightarrow$ (elevando al cuadrado) $1-y^2=1-2y+y^2 \rightarrow 2y^2-2y=0 \rightarrow y=\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$,

1) $\cos(x)=0 \rightarrow x=\begin{cases} 90+360k \\ 270+360k \end{cases}$

2) $\cos(x)=1 \rightarrow x=0+360k$

Tenemos que comprobar que solución es válida (al elevar al cuadrado):

- $x=90 \rightarrow \text{sen}(90)+\cos(90)=1$ **válida**
- $x=270 \rightarrow \text{sen}(270)+\cos(270)=-1$, no válida
- $x=0 \rightarrow \text{sen}(0)+\cos(0)=1$, **válida**

5. Sistemas de ecuaciones trigonométricas

Un sistema de ecuaciones trigonométricas cuando al menos en una de las ecuaciones que la forman es una ecuación trigonométrica.

Para resolver los sistemas trigonométricos no siempre sencillo, veamos los tipos de sistemas más frecuentes:

Nota: en las funciones trigonométricas donde aparezcan las incógnitas en ecuaciones no trigonométricas se suponen que están expresadas en radianes.

5.1. Sistemas resolubles por los cambio de variable o por reducción.

Son sistemas donde aparecen dos razones trigonométricas, tal que podemos hacer el cambio de variable y obtener un sistema de ecuaciones no trigonométricas. ***Ejemplos:***

1) $\begin{cases} sen(2x)+\cos(3y)=1 \\ 2\cdot sen(2x)+4\cdot\cos(3y)=3 \end{cases}$ → X=sen(2x),Y=cos(3y) → $\begin{cases} X+Y=1 \\ 2\cdot X+4\cdot Y=3 \end{cases}$ → X=1/2, Y=1/2.

X=1/2 → sen(2x)=1/2 → x=15º+360ºk, x=75º+360ºk, x=195º+360ºk, x=255º+360ºk

Y=1/2 → cos(3Y)=1/2 → y=100º+360ºk, y=220º+360ºk, y=340º+360ºk, y=20º+360ºk, y=140º+360ºk, y=260º+360ºk

2) $\begin{cases} (1)\ \ y+\cos^2(x)=1 \\ (2)\ \ 2\cdot y+2\cdot sen^2(x)=0 \end{cases}$

2·(1)-(2) → $2\cdot\cos^2(x)-2\cdot sen^2(x)=2$ → $1-sen^2(x)-sen^2(x)=1$ → sen(x)=0 → x=$\begin{cases} 0º+360k \\ 180º+360k \end{cases}$

y=1-$\cos^2(x)$=0rad=0º

5.2. Sistemas donde una ecuación del sistema es resoluble.

3*)* $\begin{cases} sen(x)+\cos(y)=1 \\ x+y=\pi/2 \end{cases}$ → x=π/2-y

sen(π/2-y)+cos(y)=1 →cos(y)+cos(y)=1 → cos(y)=1/2 → y=$\begin{cases} 60º+360º\cdot k=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k \\ 300º+360º\cdot k=\dfrac{5\pi}{3}+2\pi k \end{cases}$

x=$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right)=\dfrac{\pi}{6}-2\pi k \\ \dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{5\pi}{3}+2\pi k\right)=\dfrac{-7\pi}{6}-2\pi k \end{cases}$

Soluciones, si x=$\dfrac{\pi}{6}-2\pi k$ → y=$\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$; si x=$\dfrac{-7\pi}{6}-2\pi k$ → y=$\dfrac{5\pi}{3}+2\pi k$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

4) $\begin{cases} sen(x-y)=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ sen(x+y)=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x-y=\begin{cases} 45º+360º\,k \\ 135º+360º\,k \end{cases} \\ x+y=\begin{cases} 60º+360º\,k \\ 120º+360º\,k \end{cases} \end{matrix}$.

Tenemos 4 posibles sistemas:

a)

$$\begin{cases} x-y=45º+360º\,k \\ x+y=60º+360º\,k \end{cases} \rightarrow 2x=105º+360º\,k \rightarrow \begin{cases} x=52{,}5º+360º\,k \rightarrow y=7{,}5º+360º\,k \\ x=232{,}5º+360º\,k \rightarrow y=187{,}5º+360º\,k \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x-y=45º+360º\,k \\ x+y=120º+360º\,k \end{cases} \rightarrow 2x=165º+360º\,k \rightarrow \begin{cases} x=82{,}5º+360º\,k \rightarrow y=37{,}5º+360º\,k \\ x=262{,}5º+360º\,k \rightarrow y=217{,}5º+360º\,k \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x-y=135º+360º\,k \\ x+y=60º+360º\,k \end{cases} \rightarrow 2x=195º+360º\,k \rightarrow \begin{cases} x=97{,}5º+360º\,k \rightarrow y=322{,}5º+360º\,k \\ x=277{,}5º+360º\,k \rightarrow y=142{,}5º+360º\,k \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x-y=135º+360º\,k \\ x+y=120º+360º\,k \end{cases} \rightarrow 2x=255º+360º\,k \rightarrow \begin{cases} x=127{,}5º+360º\,k \rightarrow y=352{,}5º+360º\,k \\ x=307{,}5º+360º\,k \rightarrow y=172{,}5º+360º\,k \end{cases}$$

PROBLEMAS

SISTEMAS

1. Resolver los siguientes sistemas

a)

$$\left.\begin{matrix} (1)\ x+sen^2 y=2 \\ (2)\ x+\cos^2 y=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{(1)-(2)} \rightarrow sen^2 y-\cos^2 y=1 \rightarrow 1-\cos^2 y-\cos^2 y=1 \rightarrow$$

$$\cos y=0 \rightarrow y=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}+2\pi k \rightarrow x=1-\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1 \\ \dfrac{3\pi}{2}+2\pi k \rightarrow x=1-\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=1 \end{cases}$$

b)

$$\left.\begin{matrix} (1)\ sen(x)\cdot\cos(y)=\dfrac{3}{4} \\ (2)\ \cos(x)\cdot sen(y)=\dfrac{1}{4} \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{(1)+(2)} \rightarrow sen(x)\cdot\cos(y)+\cos(x)\cdot sen(y)=1 \rightarrow sen(x+y)=1$$

$$(x+y)=90º \rightarrow x=90º-y$$

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ sen(90-y)\cdot\cos(y)=\frac{3}{4}\\(2)\ \cos(90-y)\cdot sen(y)=\frac{1}{4}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}(1)\ \cos(y)\cdot\cos(y)=\frac{3}{4}\\(2)\ sen(y)\cdot sen(y)=\frac{1}{4}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}(1)\ \cos^2(y)=\frac{3}{4}\\(2)\ sen^2(y)=\frac{1}{4}\end{array}\right\}\rightarrow\cos(y)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(y)=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow y=\begin{cases}30º+360º\,k\rightarrow x=60º+360º\,k\\330º+360º\,k\rightarrow x=-240º+360º\,k=120º+360º\,k\end{cases}$$

$$\cos(y)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow y=\begin{cases}150º+360º\,k\rightarrow x=-60º+360º\,k=300º+360º\,k\\210º+360º\,k\rightarrow x=-120º+360º\,k=240º+360º\,k\end{cases}$$

c)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \cos(x)+\cos(y)=1\\(2)\ \cos(x+y)=1\end{array}\right\}\rightarrow x+y=0\rightarrow y=-x\rightarrow\cos(x)+\cos(-x)=1\rightarrow 2\cdot\cos(x)=1\rightarrow\cos(x)=\frac{1}{2}$$

$$x=\begin{cases}60º+360º\,k\rightarrow y=-60º+360º\,k=300º+360º\,k\\300º+360º\,k\rightarrow y=-300º+360º\,k=60º+360º\,k\end{cases}$$

d)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x+y=\frac{\pi}{2}\\(2)\ sen(x)+sen(y)=\frac{\sqrt{6}}{2}\end{array}\right\}\rightarrow\ y=\frac{\pi}{2}-x\rightarrow\ sen(x)+sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}\rightarrow$$

$$sen(x)+\cos(x)=\frac{\sqrt{6}}{2}\rightarrow sen(x)+\sqrt{1-sen^2(x)}=\frac{\sqrt{6}}{2}\xrightarrow{sen(x)=X}\sqrt{1-X^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}-X$$

$$1-X^2=\frac{6}{4}-\sqrt{6}X+X^2\rightarrow 2X^2-\sqrt{6}X+\frac{1}{2}=0\rightarrow X=\begin{cases}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

$$x=arcsen\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)=\begin{cases}15º+360k\ \rightarrow y=75º+360º\,k\\165º+360k\rightarrow y=-75º+360º\,k=285º+360º\,k\end{cases}$$

$$x=arcsen\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=\begin{cases}75º+360k\ \rightarrow y=15º+360º\,k\\105º+360k\rightarrow y=-15º+360º\,k=345º+360º\,k\end{cases}$$

Haciendo las comprobaciones (al elevar al cuadrado hay que comprobar) sólo son ciertas:

- x=75º+360ºk, y=15º +360ºk
- x=15º+360ºk, y=75º+360ºk

ECUACIONES

2. Resolver las siguientes ecuaciones

a)

$$sen\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow\frac{\pi}{4}+2x=\begin{cases}\frac{\pi}{3}+2\pi k\\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k\end{cases}\rightarrow 2x=\begin{cases}\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}+2\pi k\\ \frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}+2\pi k\end{cases}$$

$$x=\begin{cases}\frac{\pi}{24}+2\pi k\\ \frac{25\pi}{24}+2\pi k\\ \frac{5\pi}{24}+2\pi k\\ \frac{29\pi}{24}+2\pi k\end{cases}$$

b)

$$sen(3x)-sen(30^{o})=0 \rightarrow sen(3x)=sen(30^{o})\rightarrow sen(3x)=\frac{1}{2}\rightarrow 3x=\begin{cases}30^{o}+360^{o}k\\ 150^{o}+360^{o}k\end{cases}$$

$$x=\begin{cases}10^{o}+120^{o}k\\ 50^{o}+120^{o}k\end{cases}=\begin{cases}10^{o}+360^{o}k\\ 130^{o}++360^{o}k\\ 250^{o}+360^{o}k\\ 50^{o}+360^{o}k\\ 170^{o}+360^{o}k\\ 290^{o}+360^{o}k\end{cases}$$

c)

$$sen(2x)=2\cdot\cos(x)\rightarrow 2\cdot sen(x)\cdot\cos(x)-2\cdot\cos(x)=0\rightarrow 2\cdot\cos(x)\cdot\left(sen(x)-1\right)=0$$

$$\cos(x)=0\rightarrow x=\begin{cases}90^{o}+360^{o}k\\ 270^{o}+360^{o}k\end{cases}$$

$$sen(x)=1\rightarrow x=90^{o}+360^{o}k$$

d)

$$sen(x)+sen(3x)=\cos(x)\rightarrow 2\cdot sen(2x)\cdot\cos(x)=\cos(x)\rightarrow\cos(x)\big(2\cdot sen(2x)-1\big)=0$$

$$\cos(x)=0\rightarrow x=\begin{cases}90º+360º\,k\\270º+360º\,k\end{cases}$$

$$sen(2x)=\frac{1}{2}\rightarrow 2x=\begin{cases}30º+360º\,k\\150º+360º\,k\end{cases}\rightarrow x=\begin{cases}15º+180º\,k\\75º+180º\,k\end{cases}=\begin{cases}15º+360º\,k\\195º+360º\,k\\75º+360º\,k\\255º+360º\,k\end{cases}$$

e)

$$6\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos(x)=1\rightarrow 6\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-sen^2\left(\frac{x}{2}\right)=1\rightarrow 8\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=2$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}\rightarrow\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\frac{1}{2}\rightarrow\left(\frac{x}{2}\right)=\begin{cases}60º+360º\,k\\300º+360+360º\,k\\120º+360º\,k\\240º+360º\,k\end{cases}\rightarrow x=\begin{cases}120º+720k\\600º+720º\,k\\240º+720º\,k\\480º+720k\end{cases}\rightarrow x=\begin{cases}120º+720k\\240º+720k\end{cases}$$

f)

$$sen(x)+\sqrt{3}\cdot\cos(x)=2\rightarrow\sqrt{3}\cdot\cos(x)=2-sen(x)\rightarrow 3\cdot\cos^2 x=4-4sen(x)+sen^2(x)$$

$$3-3sen^2(x)=4-4sen(x)+sen^2(x)\rightarrow 4sen^2(x)-4sen(x)+1=0\rightarrow sen(x)=\frac{1}{2}\rightarrow x=\begin{cases}30º+360k\\150º+360º\,k\end{cases}$$

Como hemos elevado al cuadrado tenemos que comprobar las soluciones:

x= 30º → $sen(30)+\sqrt{3}\cdot\cos(30)=2\rightarrow\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2$ Solución

x= 150º → $sen(150)+\sqrt{3}\cdot\cos(150)=2\rightarrow\frac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-1$ No solución

Otra forma (idea feliz):

$$sen(x)+\sqrt{3}\cdot\cos(x)=2\rightarrow\frac{1}{2}sen(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(x)=1\rightarrow\cos(60º)\cdot sen(x)+sen(60º)\cdot\cos(x)=1$$

$$sen(x+60º)=1\rightarrow x+60º=90º+360º\,k\rightarrow x=30º+360º\,k$$

SIMPLIFICACIONES

3. Simplifica las siguientes expresiones:

a)

$$\frac{sen(2a)\cdot\cos(a)}{sen(a)\cdot(1+\cos 2a)}=\frac{2\cdot sen(a)\cdot\cos(a)\cdot\cos(a)}{sen(a)\cdot(1+\cos^2 a-sen^2 a)}=\frac{2\cdot sen(a)\cdot\cos^2(a)}{sen(a)\cdot(1+\cos^2 a-1+\cos^2 a)}=$$

$$=\frac{2\cdot sen(a)\cdot\cos^2(a)}{2\cdot sen(a)\cdot\cos^2(a)}=1$$

b)

$$\frac{tg(a)}{tg(2a)-tg(a)}=\frac{tg(a)}{\frac{2tg(a)}{1-tg^2(a)}-tg(a)}=\frac{tg(a)\cdot(1-tg^2(a))}{tg(a)+tg^3(a)}=\frac{1-tg^2 a}{1+tg^2 a}=\frac{\frac{\cos^2 a-sen^2 a}{\cos^2 a}}{\frac{\cos^2 a+sen^2 a}{\cos^2 a}}=$$

$$=\frac{\cos^2 a-sen^2 a}{sen^2 a+\cos^2 a}=\frac{\cos^2 a-sen^2 a}{1}=\cos^2 a-sen^2 a=\cos(2a)$$

c)

$$\frac{sen(x-y)-sen(x+y)}{\cos(x+y)-\cos(x-y)}=\frac{2\cdot\cos(x)\cdot sen(-y)}{-2sen(x)\cdot sen(y)}=-\cot g(x)\frac{sen(-y)}{sen(y)}=-\cot g(x)\frac{-sen(y)}{sen(y)}=\cot g(x)$$