Unidad 6 – Números complejos

PÁGINA 131

cuestiones iniciales

1. Halla las soluciones de las ecuaciones:

a) $x^2 - 4 = 0$ b) $x^2 + 4 = 0$

2. Halla las medidas de los lados de un rectángulo cuando se conocen el perímetro, P y el área, A. Considera los casos:

a) $P = 5{,}2$ y $A = 1{,}44$ b) $P = 4{,}8$ y $A = 1{,}69$

a

$P = 2a + 2b$

$A = a \cdot b$

b

3. Como sabes, es posible construir un triángulo rectángulo con una cuerda de 12 unidades, cuyos lados miden 3, 4 y 5, y su área 6 unidades cuadradas. **Diofanto** (275 d. C.) se preguntó si se podría construir con la misma cuerda un triángulo rectángulo de perímetro 12 y de área 7 unidades cuadradas. Intenta resolver la cuestión anterior.

SOLUCIONES

1. Las soluciones de las ecuaciones dadas son:

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2 \qquad\qquad x^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2i$$

2. En cada uno de los casos:

$$\textit{1)}\ \left.\begin{aligned} 2a + 2b &= 5{,}2 \\ a \cdot b &= 1{,}44 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 0{,}8 \text{ unidades} \\ b &= 1{,}8 \text{ unidades} \end{aligned} \quad o \quad \begin{aligned} a &= 1{,}8 \text{ u} \\ b &= 0{,}8 \text{ u} \end{aligned}$$

$$\textit{2)}\ \left.\begin{aligned} 2a + 2b &= 4{,}8 \\ a \cdot b &= 1{,}69 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{no tiene soluciones reales}$$

3. Llamando x, y a los catetos del triángulo rectángulo obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x \cdot y}{2} &= 7 \\ x^2 + y^2 &= (12 - x - y)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 12x^2 - 86x + 168 = 0$$

Esta ecuación no tiene soluciones reales, por tanto no es posible construir el triángulo que proponía Diofanto.

PÁGINA 145

ACTIVIDADES

- Con el fin de que te acostumbres a escribir los protocolos de resolución de los problemas, redacta los protocolos de los siguientes problemas:

1. **Decoración.** ¿Cómo colocarías 10 lámparas de pie en torno a un cuarto de estar cuadrado, de manera que haya el mismo número de lámparas junto a cada pared?

2. **Las calles del pueblo.** Todas las calles de un pueblo son rectas, sin que haya dos paralelas. Al emplear una farola en cada cruce, se colocan 66 farolas. ¿Cuántas calles tiene como mínimo el pueblo?

3. **Un criado sabio.** Un señor tenía sus mejores botellas de vino dispuestas en la cava de la manera indicada en la figura.

6	9	6
9		9
6	9	6

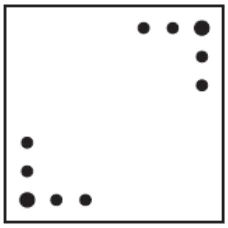
Desconfiaba de su criado y todas las noches, antes de acostarse, bajaba a la cava y las contaba, sumando el número de botellas que había en los tres compartimentos de cada uno de los cuatro lados. Si la suma era 21 botellas en los cuatro casos, descansaba feliz.

El criado, por su parte, sabedor de la estratagema y del bajo concepto que de él tenía el señor, decidió robarle botellas. ¡Y lo consiguió! Le robaba unas cuantas y redistribuía las restantes, de tal modo que ello no perturbase los sueños del amo.

¿Cuántas botellas, como máximo, pudo robar? ¿cómo quedó la cava?

SOLUCIONES

1. Si cada punto representa una lámpara, la solución quedaría del siguiente modo:



2. Si hay n calles el número máximo de cruces es:

$$C_{n,2} = \frac{n^2 - n}{2}.$$

Luego si hay 66 farolas $\Rightarrow$ 66 cruces $\Rightarrow$ $\frac{n^2-n}{2}$ $\Rightarrow$ $n^2 - n - 132 = 0$ $\Rightarrow$ $n = 12$ calles como mínimo tenía el pueblo.

3. Ésta es una de las disposiciones en que quedó la cava.
Como máximo se pudo robar:

$$60 - 42 = 18 \text{ botellas.}$$

La disposición de las 42 botellas en la cava admite muchas formas diferentes.

1		20
20		1

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Efectúa las siguientes operaciones:
   a) $4i + (3 - 5i) + (2 - i) + (1 - i)$
   b) $(2 + 4i) + (3 - 2i) - 2 \cdot (-4 + 7i)$
   c) $(2 + i) - (-2 + 3i) + (3 + 5i)$
   d) $(5 - 4i) - (-3 + 2i) + \frac{1}{2} \cdot (6 - 6i)$

2. Calcula los productos y cocientes:
   a) $(4 - 2i) \cdot (5 + 3i)$
   b) $(3 + 4i) \cdot (6 - i)$
   c) $(3 + i) \cdot (3 - i)$
   d) $\frac{1 + 3i}{3 - i}$
   e) $\frac{2 - 5i}{4 + 2i}$
   f) $\frac{5}{2i}$

3. Sabiendo que $u = 4 - 3i$, $v = 2i$, $w = -1 + i$, calcula:
   a) $u + v - w$
   b) $u + i - (v - w)$
   c) u^2
   d) v^3
   e) $(u + v)^2$
   f) $u \cdot v \cdot w$
   g) $u \cdot (v - w)$
   h) $\frac{u}{w}$
   i) $\frac{(u + v)^3}{w^3}$
   j) $\frac{v}{w}$

4. Calcula los valores de las operaciones siguientes:
   a) i^{17}
   b) i^{50}
   c) i^{301}
   d) i^{723}
   e) $i^{1\,999}$
   f) $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{20}$
   g) $1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2\,000}$
   h) $\frac{i^{302}}{i^{485} - i^{274}}$
   i) $\frac{i^3 + i^6 + i^{11} + i^{13}}{1 + i^3}$

5. Resuelve las siguientes cuestiones:
   a) Halla x con la condición de que $(x + 3i)^2$ sea un número imaginario puro.
   b) Encuentra a con la condición de que $(2 + i) \cdot (a - 3i)$ sea un número real.
   c) Calcula $a + bi$ para que se verifique: $(a + bi) \cdot (2 - i) = 7 - i$.
   d) Determina el número real x para que el cociente $\frac{2 + xi}{1 - xi}$ sea un número real.

6. Escribe de todas las formas posibles los siguientes complejos:
   a) $2 + 2i$
   b) $1 - i$
   c) $-3 + 4i$
   d) i
   e) $\sqrt{2}_{135°}$
   f) $4_{30°}$
   g) $2_{225°}$
   h) $2_{60°}$

7. Representa en el plano complejo los siguientes números complejos:
   $3 + 2i$, $5 - 7i$, $8i$, 3, $-2 + 3i$, $5 - 5i$, $2_{30°}$, $1_{90°}$, $4_{45°}$, $1_{180°}$, $2_{225°}$, $1_{270°}$

8. Efectúa las siguientes operaciones, expresando los resultados en forma binómica:
   a) $4_{20°} \cdot 3_{25°}$
   b) $12_{54°} : 3_{24°}$
   c) $20_{83°} : 5_{23°}$
   d) $[6 (\cos 130° + i \operatorname{sen} 130°)] \cdot [3 (\cos 80° + i \operatorname{sen} 80°)]$
   e) $\frac{4 (\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°)}{2 (\operatorname{sen} 30° + i \operatorname{sen} 30°)}$

SOLUCIONES

1. Las soluciones son:

a) $6-3i$ b) $13-12i$ c) $7+3i$ d) $11-9i$

2. Las soluciones son:

a) $26+2i$ b) $22+21i$ c) 10

d) i e) $-\frac{1}{10}-\frac{6}{5}i$ f) $-\frac{5}{2}i$

3. Las soluciones son:

a) $5-2i$ b) $3-3i$ c) $7-24i$ d) $-8i$ e) $15-8i$

f) $-14-2i$ g) $7+i$ h) $-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i$ i) $\frac{5}{4}-\frac{99}{4}i$ j) $1-i$

4. Las soluciones son:

a) $i^{17}=i$ b) $i^{50}=i^2=-1$

c) $i^{301}=i^1=i$ d) $i^{723}=i^3=-i$

e) $i^{1\,999}=i^3=-i$ f) $i+i^2+i^3+...+i^{20}=\frac{i^{20}\cdot i-i}{i-1}=0$

g) $i+i^2+i^3+...+i^{2\,000}=\frac{i^{2\,000}\cdot i-i}{i-1}=1$ h) $\frac{i^{302}}{i^{485}-i^{274}}=\frac{i^2}{i-i^2}=\frac{-1}{i+1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

i) $\frac{i^3+i^6+i^{11}+i^{13}}{1+i^3}=\frac{i+1}{i-1}=-i$

5. Quedan del siguiente modo:

a) $(x+3i)^2=x^2-9+6xi \Rightarrow$ imaginario puro $x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3$

b) $(2+i)(a-3i)=2a-6i+ai+3=$nº real $\Rightarrow -6+a=0 \Rightarrow a=6$

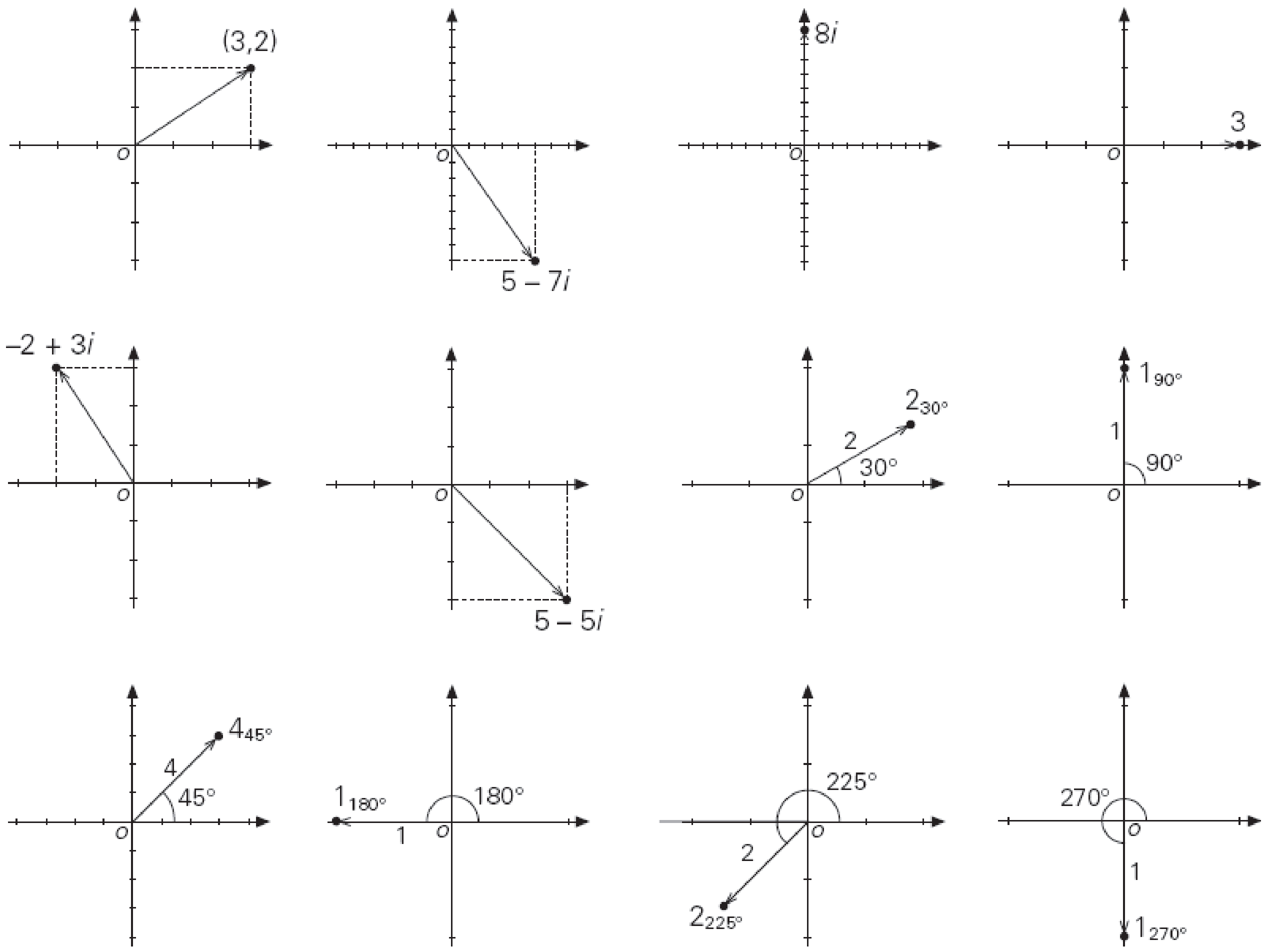
c) $(a\cdot bi)(2-i)=7-i \Rightarrow (a+bi)=\frac{7-i}{2-i}=\frac{(7-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=3+i$

d) $\frac{2+xi}{1-xi}=\frac{(2+xi)(1+xi)}{(1-xi)(1+xi)}=\frac{2-x^2+3xi}{1+x^2}=$nº real $\Rightarrow 3x=0 \Rightarrow x=0$

6. La tabla queda del siguiente modo:

Afijo	Forma binómica	Forma polar	Forma trigonométrica
$(2,2)$	$2+2i$	$\left(2\sqrt{2}\right)_{45^\circ}$	$2\sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i\,\text{sen}\, 45^\circ)$
$(1,-1)$	$1-i$	$\sqrt{2}_{315^\circ}$	$\sqrt{2}\,(\cos 315^\circ + i\,\text{sen}\, 315^\circ)$
$(-3,4)$	$-3+4i$	5_{127°	$5\,(\cos 127^\circ + i\,\text{sen}\, 127^\circ)$
$(0,1)$	i	1_{90°	$1(\cos 90^\circ + i\,\text{sen}\, 90^\circ)$
$(-1,1)$	$-1+i$	$\sqrt{2}_{135^\circ}$	$\sqrt{2}\,(\cos 135^\circ + i\,\text{sen}\, 135^\circ)$
$(2\sqrt{3},2)$	$2\sqrt{3}+2i$	4_{30°	$4\,(\cos 30^\circ + i\,\text{sen}\, 30^\circ)$
$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$	2_{225°	$2\,(\cos 225^\circ + i\,\text{sen}\, 225^\circ)$
$(2,2\sqrt{3})$	$2+2\sqrt{3}i$	4_{60°	$4\,(\cos 60^\circ + i\,\text{sen}\, 60^\circ)$

7. Las representaciones quedan del siguiente modo:



8. Las soluciones son:

a) $4_{20^\circ} \cdot 3_{25^\circ} = 12_{45^\circ} = 12\,(\cos 45º + i\,\text{sen}\,45º) = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}\,i$

b) $\frac{12_{54^\circ}}{3_{24^\circ}} = 4_{30^\circ} = 4\,(\cos 30º + i\,\text{sen}\,30º) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2i$

c) $\frac{20_{83^\circ}}{5_{23^\circ}} = 4_{60^\circ} = 4\,(\cos 60º + i\,\text{sen}\,60º) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}\,i$

d) $\left[6\,(\cos 130º + i\,\text{sen}\,130º)\right] \cdot \left[3\,(\cos 80º + i\,\text{sen}\,80º)\right] = 6_{130^\circ} \cdot 3_{80^\circ} = 18_{210^\circ} = 18\,(\cos 210º + i\,\text{sen}\,210º) =$

$= 18\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -9\sqrt{3} - 9i$

e) $\frac{4\,(\cos 330º + i\,\text{sen}\,330º)}{2\,(\mathit{sen}\ 30º + i\,\text{sen}\,30º)} = \frac{4_{330^\circ}}{2_{30^\circ}} = 2_{300^\circ} = 2\,(\cos 300º + i\,\text{sen}\,300º) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}\,i$

9. Calcula las siguientes potencias:

a) $(1_{30°})^3$ b) $(4_{225°})^2$ c) $[4(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)]^3$

10. Calcula el cuadrado, el cubo y la cuarta potencia de los complejos:

a) $1 + i$ b) $1 - i$ c) $2 + 3i$ d) $-2 + i$ e) $2_{45°}$ f) $1_{225°}$ g) $3_{90°}$ h) $3_{180°}$

11. Expresa el resultado de las siguientes operaciones en forma polar:

a) $(-4 - 4i)^4$ c) $(i^8 + i^5) : \sqrt{2}i$ e) $\dfrac{(2\sqrt{3} - 2i)^8}{(-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^6}$

b) $(\sqrt{3} + i)^5 : (1 - i)^3$ d) $i^{39} \cdot (-4 - 4\sqrt{3}i)^7$ f) $i^{-73} \cdot \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i\right)$

12. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{i}$ c) $\sqrt[4]{1 + i}$ e) $\sqrt[3]{1 - i}$ g) $\sqrt[5]{\dfrac{-32}{i}}$ i) $\sqrt[6]{i}$

b) $\sqrt{-25}$ d) $\sqrt[3]{-27}$ f) $\sqrt[3]{\dfrac{1 - i}{1 + i}}$ h) $\sqrt[6]{729i}$ j) $\sqrt[3]{\dfrac{i^5 - i^{-5}}{2i}}$

13. Obtén y representa gráficamente las soluciones de las siguientes raíces:

a) $\sqrt[6]{1}$ b) $\sqrt[3]{-1}$ c) $\sqrt[4]{16i}$ d) $\sqrt[5]{-32}$ e) $\sqrt[3]{-27i}$

14. Comprueba que los números complejos $4 + 3i$ y $4 - 3i$ son las soluciones de la ecuación:

$$x^2 - 8x + 25 = 0$$

15. Halla las ecuaciones de segundo grado, cuyas soluciones son los números:

a) i y $-i$ b) $2 + 2i$ y $2 - 2i$ c) $2 + 3i$ y $2 - 3i$ d) $2_{45°}$ y $2_{315°}$.

16. Halla todas las soluciones de las ecuaciones:

a) $z^6 - 1 = 0$ c) $z^4 + 1 = 0$ e) $z^4 - 81 = 0$

b) $z^2 + z + 1 = 0$ d) $z^3 - 6z^2 + 10z - 8 = 0$ f) $z^6 - 64 = 0$

17. Calcular el módulo y el argumento de todas las raíces de las ecuaciones:

a) $z^2 + z + 1 = 0$ c) $z^2 + iz + 2 = 0$ e) $z^3 + 1 = 0$

b) $z^2 - \sqrt{12}\, z + 4 = 0$ d) $z^6 - 28z^3 + 27 = 0$ f) $z^3 - 64i = 0$

18. Utilizando la fórmula de Moivre, obtén $\operatorname{sen} 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$ en función de $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$. De igual forma, halla $\operatorname{sen} 4\alpha$ y $\cos 4\alpha$ en función de $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$.

19. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Determina b para que el módulo del cociente $(b + 4i) : (1 + i)$ sea $\sqrt{26}$.

b) La suma de dos números complejos conjugados es 24, y la suma de sus módulos es 26. ¿De qué números complejos se trata?

c) La suma de dos números complejos es $5 - 3i$. El cociente de ambos es imaginario puro, y la parte real del numerador es 4. Halla dichos números.

9. Las potencias quedan:

a) $\left(1_{30^\circ}\right)^3 = 1_{90^\circ} = i$

b) $\left(4_{225^\circ}\right)^2 = 16_{450^\circ} = 16_{90^\circ} = 16i$

c) $\left[4\left(\cos 20^\circ + i \operatorname{sen} 20^\circ\right)\right]^3 = \left(4_{20^\circ}\right)^3 = 64_{60^\circ} = 32 + 32\sqrt{3}\,i$

10. Cada uno de los casos quedan:

a) $1+i = \sqrt{2}_{45^\circ}$
$(1+i)^2 = \left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^2 = 2_{90^\circ} = 2\,i$
$(1+i)^3 = \left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^3 = 2\sqrt{2}_{135^\circ} = -2 + 2i$
$(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^4 = 4_{180^\circ} = -4$

b) $1-i = \sqrt{2}_{315^\circ}$
$(1-i)^2 = \left(\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^2 = 2_{630^\circ} = 2_{270^\circ} = -2i$
$(1-i)^3 = \left(\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^3 = 2\sqrt{2}_{945^\circ} = 2\sqrt{2}_{225^\circ} = -2-2i$
$(1-i)^4 = \left(\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^4 = 4_{1260^\circ} = 4_{180^\circ} = -4$

c) $(2+3i)^2 = -5+12i$
$(2+3i)^3 = (-5+12i)(2+3i) = -46+9\,i$
$(2+3i)^4 = (-5+12i)^2 = -119-120\,i$

d) $(-2+i)^2 = 3-4i$
$(-2+i)^3 = (3-4i)(-2+i) = -2+11i$
$(-2+i)^4 = (3-4i)^2 = -7-24i$

e) $\left(2_{45^\circ}\right)^2 = 4_{90^\circ};\ \left(2_{45^\circ}\right)^3 = 8_{135^\circ};\ \left(2_{45^\circ}\right)^4 = 16_{180^\circ}$

f) $\left(1_{225^\circ}\right)^2 = 1_{90^\circ};\ \left(1_{225^\circ}\right)^3 = 1_{315^\circ};\ \left(1_{225^\circ}\right)^4 = 1_{180^\circ}$

g) $\left(3_{90^\circ}\right)^2 = 9_{180^\circ};\ \left(3_{90^\circ}\right)^3 = 27_{270^\circ};\ \left(3_{90^\circ}\right)^4 = 81_{0^\circ}$

h) $\left(3_{180^\circ}\right)^2 = 9_{0^\circ};\ \left(3_{180^\circ}\right)^3 = 27_{180^\circ};\ \left(3_{180^\circ}\right)^4 = 81_{0^\circ}$

11. Las soluciones quedan:

a) $(-4-4\,\mathrm{i})^4 = \left(\sqrt{32}_{315^\circ}\right)^4 = 1024_{180^\circ}$

b) $\dfrac{\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^5}{(1-\mathrm{i})^3} = \dfrac{(2_{30^\circ})^5}{\left(\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^3} = \dfrac{32_{150^\circ}}{2\sqrt{2}_{225^\circ}} = 8\sqrt{2}_{-75^\circ} = 8\sqrt{2}_{285^\circ}$

c) $\dfrac{\mathrm{i}^8+\mathrm{i}^5}{\sqrt{2}\,\mathrm{i}} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}\,\mathrm{i}} = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}_{135^\circ}}{\sqrt{2}_{0^\circ}} = 1_{135^\circ}$

d) $\mathrm{i}^{39}\cdot\left(-4-4\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^7 = -\mathrm{i}\left(-4-4\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^7 = 1_{270^\circ}\cdot\left(8_{240^\circ}\right)^7 = 1_{270^\circ}\cdot 8^7{}_{240^\circ} = 8^7{}_{150^\circ}$

e) $\dfrac{\left(2\sqrt{3}-2\mathrm{i}\right)^8}{\left(-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right)^6} = \dfrac{(4_{330^\circ})^8}{(8_{135^\circ})^6} = \dfrac{4^8{}_{120^\circ}}{8^6{}_{90^\circ}} = \left(\dfrac{1}{4}\right)_{30^\circ}$

f) $\mathrm{i}^{-73}\cdot\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right) = \mathrm{i}^{-1}\cdot 3_{330^\circ} = \dfrac{3_{330^\circ}}{1_{90^\circ}} = 3_{240^\circ}$

12. Las raíces quedan:

a) $\sqrt[3]{\mathrm{i}} = \sqrt[3]{1_{90^\circ}} = 1_{\frac{90^\circ+360^\circ K}{3}} = 1_{30^\circ+120^\circ K} \Rightarrow$ Las raíces son: $1_{30^\circ};\, 1_{150^\circ};\, 1_{270^\circ}$

b) $\sqrt{-25} = \sqrt{25_{180^\circ}} = \sqrt{25}_{\frac{180^\circ+360^\circ K}{2}} = 5_{90^\circ+180^\circ K} \Rightarrow$ Las raíces son: $5_{90^\circ};\, 5_{270^\circ}$

c) $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}} = \sqrt[4]{\sqrt{2}_{45^\circ}} = \sqrt[8]{2}_{\frac{45^\circ+360^\circ K}{4}} = \sqrt[8]{2}_{11^\circ 15'+90^\circ K} \Rightarrow$ Las raíces son: $\sqrt[8]{2}_{11^\circ 15'};\, \sqrt[8]{2}_{101^\circ 15'};\, \sqrt[8]{2}_{191^\circ 15'};\, \sqrt[8]{2}_{281^\circ 15'}$

d) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180^\circ}} = 3_{\frac{180^\circ+360^\circ K}{3}} = 3_{60^\circ+120^\circ K} \Rightarrow$ Las raíces son: $3_{60^\circ};\, 3_{180^\circ};\, 3_{300^\circ}$

e) $\sqrt[3]{1-\mathrm{i}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{315^\circ}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{315^\circ+360^\circ K}{3}} = \sqrt[6]{2}_{105^\circ+120^\circ K} \Rightarrow$ Las raíces son: $\sqrt[6]{2}_{105^\circ};\, \sqrt[6]{2}_{225^\circ};\, \sqrt[6]{2}_{345^\circ}$

f) $\sqrt[3]{\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}} = \sqrt[3]{-\mathrm{i}} = \sqrt[3]{1_{270^\circ}} = 1_{\frac{270^\circ+360^\circ K}{3}} = 1_{90^\circ+120^\circ K} \Rightarrow$ Las raíces son: $1_{90^\circ};\, 1_{210^\circ};\, 1_{330^\circ}$

g) $\sqrt[5]{\dfrac{-32}{i}} = \sqrt[5]{32\,i} = \sqrt[5]{32_{90^\circ}} = 2_{\frac{90^\circ+360^\circ K}{5}} = 2_{18^\circ+72^\circ K} \Rightarrow$ Las raíces son: $2_{18^\circ}; 2_{90^\circ}; 2_{162^\circ}; 2_{234^\circ}; 2_{306^\circ}$

h) $\sqrt[6]{729\,i} = \sqrt[6]{729_{90^\circ}} = \sqrt[6]{729}_{\frac{90^\circ+360^\circ K}{6}} = 3_{15^\circ+60^\circ K} \Rightarrow$ Las raíces son: $3_{15^\circ}; 3_{75^\circ}; 3_{135^\circ}; 3_{195^\circ}; 3_{225^\circ}; 3_{315^\circ}$

i) $\sqrt[6]{i} = \sqrt[6]{1_{90^\circ}} = \sqrt[6]{1}_{\frac{90^\circ+360^\circ K}{6}} = 1_{15^\circ+60^\circ K} \Rightarrow$ Las raíces son: $1_{15^\circ}; 1_{75^\circ}; 1_{135^\circ}; 1_{195^\circ}; 1_{225^\circ}; 1_{315^\circ}$

j) $\sqrt[3]{\dfrac{i^5 - i^{-5}}{2\,i}} = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1_{0^\circ}} = \sqrt[3]{1}_{\frac{0^\circ+360^\circ K}{3}} = 1_{120^\circ K} \Rightarrow$ Las raíces son: $1_{0^\circ}; 1_{120^\circ}; 1_{240^\circ}$

13. Quedan del siguiente modo:

a) $\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1_{0^\circ}} = 1_{\frac{0^\circ+360^\circ K}{6}} = 1_{60^\circ K} \Rightarrow$ Las soluciones son: $1_{0^\circ}; 1_{60^\circ}; 1_{120^\circ}; 1_{180^\circ}; 1_{240^\circ}; 1_{300^\circ}$

Gráficamente obtenemos los vértices de un hexágono regular centrado en el origen de coordenadas.

b) $\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1_{180^\circ}} = 1_{\frac{180^\circ+360^\circ K}{3}} = 1_{60^\circ+120^\circ K} \Rightarrow$ Las soluciones son: $1_{60^\circ}; 1_{180^\circ}; 1_{300^\circ}$

Gráficamente obtenemos los vértices de un triángulo equilátero centrado en el origen de coordenadas.

c) $\sqrt[4]{16\,i} = \sqrt[4]{16_{90^\circ}} = 2_{\frac{90^\circ+360^\circ K}{4}} = 2_{22,5^\circ+90^\circ K} \Rightarrow$ Las soluciones son: $2_{22,5^\circ}; 2_{112,5^\circ}; 2_{202,5^\circ}; 2_{292,5^\circ}$

Gráficamente obtenemos los vértices de un cuadrado centrado en el origen de coordenadas.

d) $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32_{180^\circ}} = 2_{\frac{180^\circ+360^\circ K}{5}} = 2_{36^\circ+72^\circ K} \Rightarrow$ Las soluciones son: $2_{36^\circ}; 2_{108^\circ}; 2_{180^\circ}; 2_{252^\circ}; 2_{324^\circ}$

Gráficamente obtenemos los vértices de un pentágono regular centrado en el origen de coordenadas.

e) $\sqrt[3]{-27\,i} = \sqrt[3]{27_{270^\circ}} = 3_{\frac{270^\circ+360^\circ K}{3}} = 3_{90^\circ+120^\circ K} \Rightarrow$ Las soluciones son: $3_{90^\circ}; 3_{210^\circ}; 3_{330^\circ}$

Gráficamente obtenemos los vértices de un triángulo equilátero centrado en el origen de coordenadas.

14. Sustituyendo en la ecuación original cada una de las raíces obtenemos:

- $(4+3\mathrm{i})^2-8(4+3\mathrm{i})+25=16+24\mathrm{i}-9-32-24\mathrm{i}+25=0$
- $(4-3\mathrm{i})^2-8(4-3\mathrm{i})+25=16-24\mathrm{i}-9-32+24\mathrm{i}+25=0$

15. Las ecuaciones quedan del siguiente modo:

Toda ecuación de segundo grado se puede construir del siguiente modo a partir de sus dos soluciones: $z^2-S\cdot z+P=0$ con $S=$suma de soluciones y $P=$producto de soluciones.

a) $\left.\begin{array}{l} S=\mathrm{i}+(-\mathrm{i})=0 \\ P=\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})=-\mathrm{i}^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2+1=0$

b) $\left.\begin{array}{l} S=(2+2\mathrm{i})+(2-2\mathrm{i})=4 \\ P=(2+2\mathrm{i})\cdot(2-2\mathrm{i})=8 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2-4z+8=0$

c) $\left.\begin{array}{l} S=(2+3\mathrm{i})+(2-3\mathrm{i})=4 \\ P=(2+3\mathrm{i})\cdot(2-3\mathrm{i})=13 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2-4z+13=0$

d) $\left.\begin{array}{l} 2_{45^\circ}=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{i} \\ 2_{315^\circ}=\sqrt{2}-\sqrt{2}\,\mathrm{i} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} S=\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right)=2\sqrt{2} \\ P=\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2-2\sqrt{2}\,z+4=0$

16. Las ecuaciones quedan:

a) $z^6-1=0 \Rightarrow z=\sqrt[6]{1}=\sqrt[6]{1_{0^\circ}}=1_{\frac{0^\circ+360^\circ K}{6}}=1_{60^\circ K} \Rightarrow z_0=1_{0^\circ};\ z_1=1_{60^\circ};\ z_2=1_{120^\circ};\ z_3=1_{180^\circ};\ z_4=1_{240^\circ};\ z_5=1_{300^\circ}$

b) $z^2+z+1=0 \Rightarrow z=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} \Rightarrow z_0=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i};\ z_1=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

c) $z^4+1=0 \Rightarrow z=\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{1_{180^\circ}}=1_{\frac{180^\circ+360^\circ K}{4}}=1_{45^\circ+90^\circ K} \Rightarrow z_0=1_{45^\circ};\ z_1=1_{135^\circ};\ z_2=1_{225^\circ};\ z_3=1_{315^\circ}$

d) $z^3-6z^2+10z-8=0 \Rightarrow (z-4)\,(z^2-2z+2)=0 \Rightarrow z_0=4;\ z_1=1+\mathrm{i};\ z_2=1-\mathrm{i}$

e) $z^4-81=0 \Rightarrow z=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{81_{0^\circ}}=3_{\frac{0^\circ+360^\circ K}{4}}=3_{90^\circ K} \Rightarrow z_0=3_{0^\circ};\ z_1=3_{90^\circ};\ z_2=3_{180^\circ};\ z_3=3_{270^\circ}$

f) $z^6-64=0 \Rightarrow z=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{64_{0^\circ}}=2_{\frac{0^\circ+360^\circ K}{6}}=2_{60^\circ K} \Rightarrow z_0=2_{0^\circ};\ z_1=2_{60^\circ};\ z_2=2_{120^\circ};$

$z_3=2_{180^\circ};\ z_4=2_{240^\circ};\ z_5=2_{300^\circ}$

17. Las soluciones quedan:

a) $z^2+z+1=0 \Rightarrow z=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}$

$\Rightarrow \quad z_1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=1_{120°}\,; \quad z_2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=1_{240°}$

b) $z^2-\sqrt{12}\,z+4=0 \;\Rightarrow\; z=\dfrac{\sqrt{12}\pm\sqrt{12-16}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}\pm 2\mathrm{i}}{2}=\sqrt{3}\pm\mathrm{i}$

$\Rightarrow \quad z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}=2_{30°}; \quad z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}=2_{330°}$

c) $z^2+\mathrm{i}z+2=0 \;\Rightarrow\; z=\dfrac{-i\pm\sqrt{\mathrm{i}^2-8}}{2}=\dfrac{-i\pm\sqrt{-9}}{2}=\dfrac{1\pm 3\mathrm{i}}{2}$

$\Rightarrow \quad z_1=\mathrm{i}; \quad z_2=-2\mathrm{i}$

d) $z^6-28z^3+27=0 \;\Rightarrow\; z^3=\dfrac{28\pm\sqrt{784-108}}{2}=\dfrac{28\pm 26}{2}=\begin{cases}27\\ 1\end{cases}$

Para cada solución: $\begin{cases}27 \Rightarrow z=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{27_{0°}}=3_{120°K} \;\Rightarrow\; z_0=3_{0°};\; z_1=3_{120°};\; z_2=3_{240°}\\ 1 \;\Rightarrow\; z=\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1_{0°}}=1_{120°K} \;\Rightarrow\; z_3=1_{0°};\; z_4=1_{120°};\; z_5=1_{240°}\end{cases}$

e) $z^3+1=0 \;\Rightarrow\; z=\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{1_{180°}}=1_{\frac{180°+360°K}{3}}=1_{60°+120°K}$

$\Rightarrow \quad z_0=1_{60°};\; z_1=1_{180°};\; z_2=1_{300°}$

f) $z^3-64\mathrm{i}=0 \;\Rightarrow\; z=\sqrt[3]{64\mathrm{i}}=\sqrt[3]{64_{90°}}=4_{\frac{90°+360°K}{3}}=4_{30°+120°K}$

$\Rightarrow \quad z_0=4_{30°}; z_1=4_{150°}; z_2=4_{270°}$

18. Las demostraciones quedan:

- $(\cos\alpha + i\,sen\,\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\,sen\,2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha + 2\,sen\,\alpha\,\cos\alpha\,i = \cos 2\alpha + i\,sen\,2\alpha$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha \\ sen\,2\alpha = 2\,sen\,\alpha \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

- $(\cos\alpha + i\,sen\,\alpha)^4 = \cos 4\alpha + i\,sen\,4\alpha + \cos^4\alpha + sen^4\alpha - 6\cos^2\alpha\,sen^2\alpha +$

$+ 4\,sen\,\alpha \cdot \cos^3\alpha \cdot i - 4\,sen^3\alpha\,\cos\alpha\,i = \cos 4\alpha + i\,sen\,4\alpha$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 4\alpha = \cos^4\alpha + sen^4\alpha - 6\cos^2\alpha \cdot sen^2\alpha \\ sen\,4\alpha = 4\,sen\,\alpha \cdot \cos^3\alpha - 4\,sen^3\alpha \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

19. Quedan resueltas del siguiente modo:

a) $$\frac{b+4i}{1+i} = \frac{b+4}{2} + \frac{4-b}{2}i \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{b+4}{2}\right)^2 + \left(\frac{4-b}{2}\right)^2} = \sqrt{26} \Rightarrow \frac{b^2+16}{2} = 26 \Rightarrow b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6$$

b) $$\left.\begin{array}{r} (a+bi)+(a-bi)=24 \\ \sqrt{a^2+b^2}=26 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=12 \\ b=\pm 5 \end{array} \Rightarrow \text{Los números complejos son: } (12+5i);\ (12-5i)$$

c) $$\left.\begin{array}{r} (a+bi)+(c-di)=5-3i \\ \dfrac{a+bi}{c-di}=\text{imaginario puro} \\ a=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+c=5 \\ b+d=-3 \\ bd+4c=0 \\ a=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=4 \\ c=1 \\ b=-4 \\ d=1 \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{l} a=4 \\ c=1 \\ b=1 \\ d=-4 \end{array}$$

Los números complejos son: $(4-i)$ *y* $(1+i)$ o bien $(4+i)$ y $(1-4i)$

PÁGINA 150

ACTIVIDADES FINALES

20. El número $5i$ es una raíz cúbica de un número complejo; calcula las otras raíces y el número complejo.

21. Calcula y representa las ocho primeras potencias del complejo $z = 1 + i$. Observa que los afijos se encuentran sobre una curva espiral.

22. Halla las coordenadas de los vértices de un hexágono regular, de centro en el origen, sabiendo que uno de sus vértices es el afijo del número complejo $2_{180°}$.

23. Halla las coordenadas de los vértices de un cuadrado, con centro en el origen, de forma que uno de sus vértices sea el afijo del número complejo $2_{90°}$.

24. ¿Qué ocurre con el afijo de un número complejo cuando este se multiplica por i? ¿y cuando se divide por i?

25. Un cuadrado de centro 0 tiene un vértice en (3, 4). Halla las coordenadas de los demás vértices.

26. Un cuadrado tiene sus vértices por encima del eje real. Si dos vértices consecutivos del cuadrado son $2 + i$ y $5 + 3i$, halla los otros dos vértices.

27. Dado un complejo cualquiera, distinto del complejo cero, ¿cuál es el módulo de su inverso? ¿y el argumento de su inverso? ¿Dónde se sitúa el afijo del inverso del complejo dado?

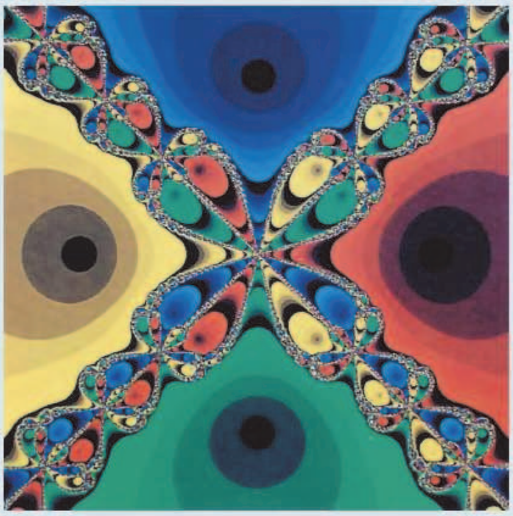
28. Calcula las coordenadas de los vértices, el perímetro y el área del triángulo cuyos vértices son los afijos de $\sqrt[3]{-64}$.

29. Halla el cuadrilátero cuyos vértices son los afijos de las raíces de la ecuación:

$$z^4 + 4 = 0$$

30. Halla dos complejos conjugados tales que el triángulo que forman sus afijos con el origen sea equilátero y su área valga $2\sqrt{3}$.

31. Calcula el área del hexágono cuyos vértices son los afijos de las raíces sextas de $-64i$.



↑ Imagen obtenida de un estudio por ordenador de la aproximación a las soluciones de la ecuación $z^4 - 1 = 0$.

La imagen permite ilustrar las siguientes palabras del matemático francés Jacques Hadaward (1865-1963):

«La trayectoria más corta entre dos verdades reales pasa a través del dominio complejo.»

20. Queda:

$$\sqrt[3]{z}=5\mathrm{i} \Rightarrow z=125\mathrm{i}^3 \Rightarrow z=-125\mathrm{i}$$

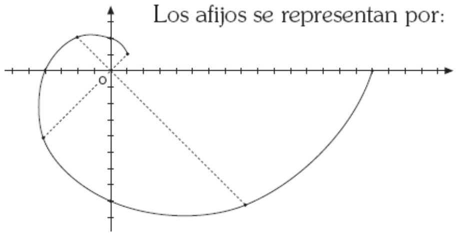
Las otras raíces son:

$$\sqrt[3]{-125\mathrm{i}}=\sqrt[3]{125_{270^\circ}}=5_{90^\circ+120^\circ K} \Rightarrow z_0=5_{90^\circ}=5\mathrm{i};\ z_1=5_{210^\circ}=\frac{-5\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}\mathrm{i};\ z_2=5_{330^\circ}=\frac{5\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}\mathrm{i}$$

21. La solución queda:

$$z=1+\mathrm{i}=\sqrt{2}_{45^\circ}$$
$$z^2=(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}=2_{90^\circ}$$
$$z^3=(1+\mathrm{i})^3=2\sqrt{2}_{135^\circ}$$
$$z^4=z^2\cdot z^2=2_{90^\circ}\cdot 2_{90^\circ}=4_{180^\circ}$$
$$z^5=z^4\cdot z=4\sqrt{2}_{225^\circ}$$
$$z^6=z^5\cdot z=8_{270^\circ}$$
$$z^7=z^6\cdot z=8\sqrt{2}_{315^\circ}$$
$$z^8=z^7\cdot z=16_{360^\circ}$$

Los afijos se representan por:



22. Los vértices del hexágono regular son:

$$2_{180^\circ};\ 2_{240^\circ};\ 2_{300^\circ};\ 2_{0^\circ};\ 2_{60^\circ};\ 2_{120^\circ}$$

Las coordenadas:

$$(2,0);\ (1,\sqrt{3});\ (-1,\sqrt{3});\ (-2,0);\ (-1,-\sqrt{3});\ (1,-\sqrt{3})$$

23. Los vértices del cuadrado son:

$$2_{90^\circ};\ 2_{180^\circ};\ 2_{270^\circ};\ 2_{0^\circ}$$

Las coordenadas:

$$(0,2);\ (-2,0);\ (0,-2);\ (2,0)$$

24. La solución queda:

- Se obtiene el número complejo girando 90º, es decir, si el número complejo tiene como afijo (a, b) obtenemos, al multiplicar por i, el número complejo de afijo ($-b$, a).

- Al dividir el número complejo i, se obtiene el mismo número complejo girado 270º.

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=b-a\mathrm{i}.\ \text{Su afijo es } (b,-a)$$

25. Los vértices del cuadrado son: $(3,4);\ (-4,3);\ (-3,-4);\ (4,-3)$

26. Los vértices son: $2+\mathrm{i}$; $5+3\mathrm{i}$; $3+6\mathrm{i}$; $1+5\mathrm{i}$

27. Quedaría del siguiente modo:

Sea el complejo: $z=a+b\mathrm{i}$

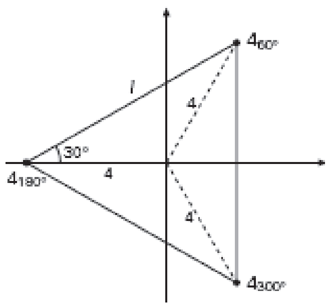
$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+b\mathrm{i}}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}\Rightarrow\begin{cases}\text{Su módulo es: } \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{1}{|z|}\\ \text{Su argumento: tg } \alpha=\dfrac{-b}{a} \quad \text{(es el opuesto del argumento de } z\text{)}\end{cases}$$

Gráficamente, el inverso de z se obtiene por una homotecia de razón $K=\dfrac{1}{|z|}$ y ángulo $(-\arg z)$

28. Los vértices de la figura se obtienen a partir vienen de la siguiente ecuación:

$$\sqrt[3]{-64}=\sqrt[3]{64_{180^\circ}}=4_{\frac{180^\circ+360^\circ K}{3}}=4_{60^\circ+120^\circ K}\quad\Rightarrow\quad 4_{60^\circ};\ 4_{180^\circ};\ 4_{300^\circ}$$

Calculamos el lado l mediante el teorema del coseno:



$l^2=4^2+4^2-2\cdot4\cdot4\cdot\cos120^\circ \Rightarrow l=6,93$ u

$\text{Perímetro}=3\cdot l=20,79$ u

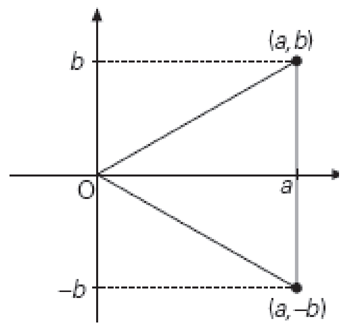
$$\text{Área}=\frac{l\cdot\frac{l\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=20,78\ \text{u}^2$$

29. La solución queda:

$$z^4+4=0 \quad\Rightarrow z=\sqrt[4]{-4}=\sqrt[4]{4_{180^\circ}}=\sqrt{2}_{\frac{180^\circ+360^\circ K}{4}}=\sqrt{2}_{45^\circ+90^\circ K}$$

Los vértices son: $\sqrt{2}_{45^\circ}=1+\mathrm{i}$ $\sqrt{2}_{135^\circ}=-1+\mathrm{i}$ $\sqrt{2}_{225^\circ}=-1-\mathrm{i}$ $\sqrt{2}_{315^\circ}=1-\mathrm{i}$

30. Sean los complejos $(a+b\mathrm{i})$ y $(a-b\mathrm{i})$. El triángulo que se forma es el de la figura:



Para que sea equilátero se debe cumplir que: $\sqrt{a^2+b^2}=2b$

Para que su área sea $2\sqrt{3}$ se debe cumplir: $\dfrac{2b\cdot a}{2}=2\sqrt{3}$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{a^2+b^2}=2b\\ ab=2\sqrt{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}a^2=3b^2\\ ab=2\sqrt{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}a=\pm\sqrt{6}\\ b=\pm\sqrt{2}\end{array}$$

Los complejos son: $(\sqrt{6}+\sqrt{2}\,\mathrm{i})$ y $(\sqrt{6}-\sqrt{2}\,\mathrm{i})$
$(-\sqrt{6}-\sqrt{2}\,\mathrm{i})$ y $(-\sqrt{6}+\sqrt{2}\,\mathrm{i})$

31. Los vértices de la figura se obtienen a partir vienen de la siguiente ecuación:

$$\sqrt[6]{-64\,i}=\sqrt[6]{64_{270^\circ}}=2_{\frac{270^\circ+360^\circ K}{6}}=2_{45^\circ+60^\circ K}\;\Rightarrow\;2_{45^\circ};\,2_{105^\circ};\,2_{165^\circ};\,2_{225^\circ};\,2_{285^\circ};\,2_{345^\circ}$$

Calculando el valor del área obtenemos: $6\sqrt{3}\,\mathrm{u}^2$.