1.- NÚMEROS COMPLEJOS

1. Halla la parte real e imaginaria de los números complejos: a) 3-i, b)-2+i, c) 5+2i.
Solución: Re(a) = 3, Im(a) = -1, Re(b) = -2, Im(b) = 1, Re(c) = 5, Im(c) = 2.

2. Halla la parte real e imaginaria de los números complejos: a) 3i, b) 5, c) i+ $\sqrt{2}$.
Solución: Re(a) = 0, Im(a) = 3, Re(b) = 5, Im(b) = 0, Re(c) = $\sqrt{2}$ *, Im(c) = 1.*

3. Representa gráficamente los números complejos de los ejercicios anteriores.

4. Obtén las soluciones de las siguientes ecuaciones y represéntalas:
a) $x^2 + 9 = 0$ b) $x^2 - 4x + 5 = 0$ c) $2x^2 + 8 = 0$ d) $2x^2 - 8 = 0$

5. Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de:
a) 2-5i b) 4+2i
c) 1-2i d) -3+2i
e) 4 f) 2
g) 3i h) -4i

2.- OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

6. ¿Cuánto ha de valer m para que el complejo z =(m-2i).(2+4i) sea un número real?.
Solución: m = 1.

7. Efectúa la operación $\frac{(5-3i)(1+i)}{(1-i)+3i}$
Solución: $\frac{12-14i}{5}$

8. Determina el valor de m para que el número complejo z = $\frac{2-mi}{8-6i}$ sea:
a) un número real
b) imaginario puro
c) tal que su afijo esté en la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes.
Solución: a) m = $\frac{3}{2}$, b) m = $-\frac{8}{3}$, c) m = 14

9. Determina el valor de *a* para que el número complejo z = (3-6i).(2-mi) sea:
a) un número real
b) imaginario puro
c) tal que su afijo esté en la bisectriz del primer y tercer cuadrante.
Solución: a) m = -4, b) m = 1, c) m= 6

10. Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $x^2+1 = 0$, b) $x^2-2x+2 = 0$.
Representa sus soluciones en el plano complejo. ¿Qué relación hay entre las soluciones de cada ecuación?
Solución: a) $z_1 = i$, $z_2 = -i$; *a)* $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$. *Son complejos conjugados.*

11. 6.- Calcula el inverso de a) z = 1-i, b) z = 3i.
Solución: a) $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ *, b)* $\frac{1}{z} = -\frac{1}{3}i$

12. Halla un número complejo tal que $|z|$ = 3 e Im(z) = -2.

Solución: $z_1 = \sqrt{5} - 2i$, $z_2 = -\sqrt{5} - 2i$

13. Calcula el módulo y el argumento de los números complejos.
a) $z_1 = \sqrt{2} + i$, b) $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, c) $z_3 = \sqrt{-5}$, d) $z_4 = \sqrt{3} - i$
Solución: a) $|z_1| = \sqrt{3}$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, b) $|z_2| = 2$, $\alpha_2 = \frac{7\pi}{4}$, c) $|z_3| = \sqrt{5}$, $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$, d) $|z_4| = 2$, $\alpha_4 = \frac{11\pi}{6}$.

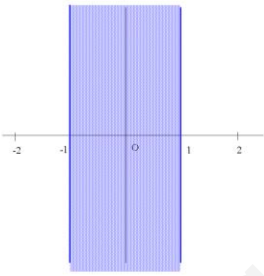
14. ¿Cuánto debe valer k para que el número complejo $(3k-2i)^2$ sea imaginario puro?
Solución: $k = \pm\frac{2}{3}$

15. Calcula un polinomio cuyas raíces sean: a) 1+3i y 1-3i, b) 2+i y 3+5i, c) i y –i.
Solución: a) $x^2-2x+10$, b) $x^2-(5+6i)x+(1+13i)$, c) x^2+1.

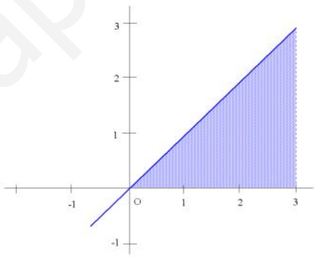
16. Calcula el número complejo $\frac{(3+2i)^2 + (3-2i)}{(5+i)^2}$

Solución: $z = \frac{73}{169} - \frac{40}{169}i$

17. Representa en el plano complejo los conjuntos de números que cumplen:
a) $-1 \leq Re(z) \leq 1$, b) $0 \leq Im(z) \leq Re(z) \leq 3$.
Solución: Las figuras adjuntas

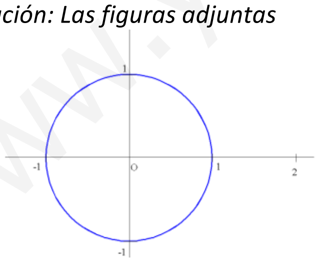


a)

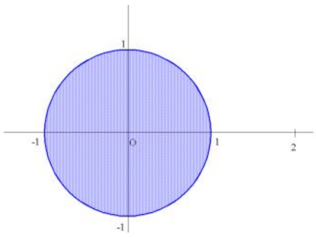


b)

18. Representa en el plano complejo los conjuntos de números que cumplen:
a) $|z| = 1$, b) $|z| < 1$
Solución: Las figuras adjuntas



a) Circunferencia C = (0,0) y radio 1



b) Círculo C = (0,0) y radio 1

3.- COMPLEJOS EN FORMA POLAR

19. Pon en forma polar los números complejos:
a) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, b) $\sqrt{3} - i$
Solución: a) $2_{\pi/4}$ b) $2_{11\pi/6}$

20. Pon en forma binómica el número complejo $z = 1_{180º}$
Solución: z = -1

21. Halla el módulo y el argumento de los siguientes números complejos:
a) (3,4), b) $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$, c) (0,-3)
Solución: a) 5, 53 °b) 2, 60 ° c) 3, 270 °.

22. Pasa a forma polar los números complejos:
a) -1-i, b) 3, c) -3i
Solución: a) $\sqrt{2}_{225°}$ b) $3_{0°}$ c) $3_{270°}$

23. Pasa a forma trigonométrica:
a) $(-4,-4\sqrt{3})$, b) (1,0), c) -1+i
Solución: a) 8(cos 240 °+i sen 240 °) b) 1(cos 0 °+i sen 0 °) c) $\sqrt{2}$ *(cos 135 °+i sen 135 °)*

24. Pasa a forma binómica los siguientes números:
a) cos 0°+i sen 0°, b) 4(cos45°+isen45°), c) cos 30°+i sen 30°
Solución: a) 1 b) $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\mathrm{i}$ *c)* $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$

25. Expresa en forma polar los complejos: a) $z_1 = \frac{5+5\mathrm{i}}{2}$, b) z_2 = 2(cos30°- i sen 30°)

Solución: a) $z_1 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)_{45°}$ *, b)* $z_2 = 2_{330°}$

26. Dado el número complejo $z = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ escríbelo en el resto de las formas que conozcas.
Solución: cartesiana (0, 1), polar $1_{90°}$*, trigonométrica 1(cos90 °+ i sen 90 °), binómica i.*

27. Halla un número complejo del segundo cuadrante que tiene por módulo 2 y tal que Re(z) = –1. Expresa dicho número en forma polar.
Solución: $z = -1+\sqrt{3}\mathrm{i} = 2_{120°}$

28. Si $z = 2_{30°}$ halla su conjugado y su opuesto.
Solución: $\bar{z} = 2_{330°}$ *y* $-z = 2_{210°}$

29. Halla un número complejo y su opuesto sabiendo que su conjugado es $\bar{z} = 3_{70°}$
Solución: $z = 3_{290°}$ *y* $-z = 2_{110°}$

30. Dados los números complejos $z_1 = \sqrt{3}-\mathrm{i}$, z_2 = 3i y z_3 = 1+i, calcula:
a) $\frac{z_1+z_2}{z_3}$ b) $z_1.z_3$ c) $(z_1)^4$ d) $\bar{z}_2$
a) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ b) $\left(2\sqrt{2}\right)_{15°}$ c) $16_{120°}$ d) $3_{270°}$

31. Calcula: a) $(2+2\mathrm{i}\sqrt{3})^2$, b) $(1+\mathrm{i})^5$, c) $(1+2\mathrm{i})^3$, d) $(2+\mathrm{i}^5)^3$
Solución: a) $16_{120°} = -8+8\sqrt{3}\mathrm{i}$ *b)* $\left[\left(\sqrt{2}\right)_{45°}\right]^5 = \left(4\sqrt{2}\right)_{225°}$ *, c)* $\left(5\sqrt{5}\right)_{80°}$, d) 2+5i.

32. Calcula las operaciones indicadas expresando el resultado en forma polar y cartesiana:
a) $3_{150°}.4_{45°}$ b) $3_{12°}.4_{17°}.2_{1°}$ c) $(2_{40°})^3$
Solución: a) $12_{195°}$ *= -11,59+3,21i b)* $24_{30°}$ *= 20,78+ 12i c)* $8_{120°}$ *= -4+6,93i.*

33. Demuestra que el producto de un complejo por su conjugado es igual al cuadrado del módulo.

4.- RADICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

34. Calcula las raíces cuartas del número complejo z = 1-i.
Solución: $z_1 = \sqrt[8]{2}_{78°75'}$, $z_2 = \sqrt[8]{2}_{168°75'}$, $z_3 = \sqrt[8]{2}_{258°75'}$ y $z_4 = \sqrt[8]{2}_{348°75'}$.

35. Halla las raíces cúbicas del complejo z = -2 + 2i
Solución: $z_1 = \sqrt{2}_{45°}$, $z_2 = \sqrt{2}_{165°}$, $z_3 = \sqrt{2}_{235°}$.

36. Calcula cuáles son las raíces cuartas de la unidad real y representarlas gráficamente.
Solución: $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$ y $z_4 = -i$.

37. Calcula cuáles son las raíces quintas de la unidad real y represéntalas gráficamente.
Solución: $z_1 = 1$, $z_2 = 1_{72°}$, $z_3 = 1_{144°}$, $z_4 = 1_{216°}$, $z_5 = 1_{288°}$

38. Halla las raíces que se indican y representa sus afijos:
a) $\sqrt{4(\cos 30° + i\operatorname{sen} 30°)}$, b) $\sqrt[4]{4(\cos 180° + i\operatorname{sen} 180°)}$.
Solución: a) $2_{15°}$, $2_{195°}$, *b)* $\sqrt{2}_{45°}$, $\sqrt{2}_{135°}$, $\sqrt{2}_{225°}$, $\sqrt{2}_{315°}$

39. Halla las soluciones de la ecuación $z^8 - 1 = 0$.
Solución: 1, $1_{45°}$, $1_{90°}$, $1_{13°}$, $1_{180°}$, $1_{225°}$, $1_{270°}$, $1_{315°}$

40. Encuentra una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean:
a) i, -i b) 1+2i, 1-2i
Solución: a) $x^2+1 = 0$, *b)* $x^2-2x+5 = 0$.

41. Halla las raíces cúbicas de 8.
Solución: $z_0 = 2$, $z_1 = -1+\sqrt{3}i$, $z_2 = -1-\sqrt{3}i$

42. Un triángulo tiene de vértices A = (-1, 0), B = (1, 0) y C = (0, 2). Si giramos el triángulo 90° ¿cuáles serán los nuevos vértices?
Solución: A' = (0, -1), B' = (0, 1) y C' = (-2, 0).

43. Un cuadrado regular tiene el centro en el origen y uno de sus vértices en el punto A = (1, 1). Calcula los demás vértices.
Solución: B' = (-1, 1), C' = (-1, -1) y D' = (1, -1).

44. Calcula y representa en el plano las raíces cuartas de -i.
Solución: $1_{67,5°}$; $1_{67,5°}$; $1_{157,5°}$; $1_{247,5°}$; $1_{337,5°}$.

45. Calcula y representa en el plano las raíces quintas de i.
Solución: $1_{18°}$; $1_{90°}$; $1_{162°}$; $1_{234°}$; $1_{306°}$.