

Derivación

1.- A partir de la definición de derivada de una función en un punto, calcular la derivada de las funciones $f(x) = 3x$, en $x_0=1$, y $g(x) = \sqrt{x-5}$ en $x_0=9$.

Sol:

2.- Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ en } x_0=0.$$

Sol: f continua en cero, pero no es derivable.

3.- Sea k un número real y f una función real definida sobre R, mediante

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} + kx & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a) Calcular la derivada de f en el punto $x_0=0$
b) Calcular la función derivada

Sol: a) $f'(0)=k$; b) $f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) + k & \text{si } k \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

4.- Estudiar la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x \leq -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Sol: f derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

5.- Calcular a y b para que la función sea derivable:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x < -1 \\ ax^2 + bx & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Sol: a=b=-2

6.- Utilizando la definición de derivada en un punto, calcular $f'(-2)$, siendo $f(x) = \frac{3-2x}{4x+1}$

Sol: -2/7

7.- Derivar y simplificar:

$$f(x) = \operatorname{Arctg} \frac{1+x}{1-x} - \operatorname{Arctg} x$$

$$g(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \cdot \operatorname{Arcsen} x + \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2}$$

Sol: $f'(x) = 0$ $g'(x) = \operatorname{arcsen} x$

8.- Hallar un punto del intervalo $[0,1]$, donde la tangente a la curva $f(x) = 1 + x - x^2$, sea paralela al eje de abscisas.

Sol: $y=(9-x)/2$

9.- Hallar los puntos en los que la tangente a la curva $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$ sea:

a) Paralela el eje OX b) Paralela a la recta: $g(x) = 5x + 3$

c) Perpendicular a la recta: $h(x) = \frac{x}{3} + 1$

Sol: a) $x=-1$ y $x=3$; b) $x=-2$ y $x=4$; c) $x=0$ y $x=2$.

10.- Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = \frac{x}{x-2}$ en el punto de abscisa $x = 3$.

Sol:

11.- Halla el punto de $f(x) = \ln(1+x^2)$ en el que la tangente es perpendicular a la tangente trazada por el punto de abscisa $x=1$.

Sol: $x=-1$

12.- Considera la función derivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ def por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcular a y b.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$

Sol: a) $b=1$; $a=0$; b) $y = \frac{-1-x}{e} + \frac{e^2-1}{2}$

13.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \frac{1}{2x} + \ln x \quad \text{Si } x > 0,$$

a) Determina el punto de la gráfica de f en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.

b) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

Sol: a) $(1, 1/2)$; b) $4x+2y-5=0$

14.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Halla b, c y d sabiendo que f tiene un máximo relativo en $x=-1$ y que $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)}{x-1} \right) = 4$

Sol: $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

15.- Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$

Sol: 3

16.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función derivable definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{b}{x} + \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Calcular a y b.

b) Para $a=3$ y $b=2$ calcular los extremos absolutos de f en el intervalo $[0, e]$

Sol: a) $b=2$; $a=3$; b) mín abs en $(2, 1 + \ln 2)$ y el máx abs en $(0, 3)$

17.- Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -bx^2 - bx + a & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{60}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Obtenga los valores de a y b para que la función sea continua y derivable.

b) Para $a=48$ y $b=3$, estudie la monotonía de f(x) y calcule sus extremos.

Sol: a) $a=48$; $b=3$; b) Máx en $(-1/2, 195/4)$

18.- Sea la función f, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 5 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Determine los valores que han de tomar a y b para que la función f sea derivable en $x=0$.

Sol:

19.- Calcular la derivada n-ésima de la función $f(x) = e^{2x}$

Sol: $f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x}$

20.- Calcular las derivadas de las funciones:

$$f(x) = \frac{x^3}{\operatorname{sen}^2 x} \quad g(x) = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right) \quad h(x) = \sqrt{1+x^4}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 \operatorname{sen}^2 x - x^3 \operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}^4 x}; g'(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \cdot \left(1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right); h'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$$