Derivación

1.- A partir de la definición de derivada de una función en un punto, calcular la derivada de las funciones $f(x)=3x$, en $x_o=1$, y $g(x)=\sqrt{x-5}$ en $x_o=9$.

Sol:

2.- Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases} \quad \text{en } x_o=0.$$

Sol: f continua en cero, pero no es derivable.

3.- Sea k un número real y f una función real definida sobre R, mediante

$$f(x)=\begin{cases}x^2 sen\dfrac{1}{x}+kx & \text{si } x\neq 0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$$

a) Calcular la derivada de f en el punto $x_o=0$
b) Calcular la función derivada

Sol: a) f'(0)=k; b) $f'(x)=\begin{cases}2xsen\dfrac{1}{x}+x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)+k & \text{si } k\neq 0\\ k & \text{si } x=0\end{cases}$

4.- Estudiar la derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases}3x+5 & \text{si } x\leq -1\\ 2 & \text{si } -1<x\leq 1\\ x^2-3x+1 & \text{si } x>1\end{cases}$$

Sol: f derivable en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

5.- Calcular a y b para que la función sea derivable:

$$f(x)=\begin{cases}x^3-x & \text{si } x<-1\\ ax^2+bx & \text{si } x\geq -1\end{cases}$$

Sol: a=b=-2

6.- Utilizando la definición de derivada en un punto, calcular f'(-2), siendo $f(x)=\dfrac{3-2x}{4x+1}$

Sol: -2/7

7.- Derivar y simplificar:

$$f(x)=Arctg\frac{1+x}{1-x}-Arctgx$$

$$g(x)=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot Arcsenx+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$$

Sol: $f'(x)=0 \quad g'(x)=xarcsenx$

8.- Hallar un punto del intervalo [0,1], donde la tangente a la curva $f(x)=1+x-x^2$, sea paralela al eje de abscisas.

Sol: y=(9-x)/2

9.- Hallar los puntos en los que la tangente a la curva $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x+1$ sea:

a) Paralela el eje OX **b)** Paralela a la recta: $g(x)=5x+3$

c) Perpendicular a la recta: $h(x)=\dfrac{x}{3}+1$

Sol: a) x=-1 y x=3; b) x=-2 y x=4; c) x=0 y x=2.

10.- Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$ en el punto de abscisa x = 3.

Sol:

11.- Halla el punto de $f(x)=\ln(1+x^2)$ en el que la tangente es perpendicular a la tangente trazada por el punto de abscisa x=1.

Sol: x=-1

12.- Considera la función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ def por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x} & si \ x<0\\ ax+b & si \ x\geq 0\end{cases}$$

a) Calcula a y b.
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=1

Sol: a) b=1; a=0; b) y= $y=\dfrac{-1-x}{e}+\dfrac{e^2-1}{2}$

13.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x)=\frac{1}{2x}+\ln x \quad \text{Si } x>0,$$

a) Determina el punto de la gráfica de f en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.
b) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x=1.

Sol: a) (1,1/2); b) 4x+2y-5=0

14.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, la función definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Halla b, c y d sabiendo que f tiene un máximo relativo en x=-1 y que $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{f(x)}{x-1}\right)=4$

Sol: $f(x)=x^3+x^2-x-1$

15.- Calcula $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x-senx}{x-senx}$

Sol: 3

16.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función derivable definida por:

$$f(x)=\begin{cases}a-x & si \ x\leq 1\\ \dfrac{b}{x}+\ln x & si \ x>1\end{cases}$$

a) Calcula a y b.
b) Para a=3 y b=2 calcula los extremos absolutos de f en el intervalo [0,e]

Sol: a) b=2; a=3; b) mín abs en (2,1+ ln 2) y el máx abs en (0,3)

17.- Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases}-bx^2-bx+a & si \ x\leq 2\\ \dfrac{60}{x} & si \ x>2\end{cases}$$

a) Obtenga los valores de a y b para que la función sea continua y derivable.
b) Para a=48 y b=3, estudie la monotonía de f(x) y calcule sus extremos.

Sol: a) a=48; b=3; b) Máx en (-1/2,195/4)

18.- Sea la función f , definida por:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-ax+5 & si \ x<0\\ -x^2+b & si \ x\geq 0\end{cases}$$

Determine los valores que han de tomar a y b para que la función f sea derivable en x=0.

Sol:

19.- Calcular la derivada n-ésima de la función $f(x)=e^{2x}$

$Sol: f^{n)}(x)=2^n\cdot e^{2x}$

20.- Calcular las derivadas de las funciones:

$$f(x)=\frac{x^3}{sen^2x} \quad g(x)=tg^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad h(x)=\sqrt{1+x^4}$$

$f'(x)=\dfrac{3x^2sen^2x-x^3sen(2x)}{sen^4x};g'(x)=tg\left(\dfrac{x}{2}\right)\left(1+tg^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right);h'(x)=\dfrac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$