

9.- DERIVADAS

1.- DERIVADA EN UN PUNTO

1. Calcula la derivada de $y = 3x^3 + x$ en $x_0 = 3$ utilizando la definición.
Solución: $y'(3) = 82$
2. Calcula la derivada de $3 - x^2$ en $x_0 = 3$ utilizando la definición.
Solución: $y'(3) = -6$
3. Calcula la derivada de $f(x) = \frac{1}{x^3}$ en $x_0 = 2$ utilizando la definición.
Solución: $f'(2) = -\frac{3}{16}$
4. Calcula la derivada de $f(x) = \sqrt{x-2}$ en $x_0 = 6$ utilizando la definición.
Solución: $f'(6) = \frac{1}{4}$
5. Calcula la derivada de la función $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x_0 = 2$ utilizando la definición.
Solución: $f'(2) = -\frac{1}{2}$

2.- DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

6. Calcula la derivada de $y = 3x^3 + x$ utilizando la definición y halla su valor en $x_0 = 3$.
Solución: $y'(3) = 82$
7. Calcula la derivada de $3 - x^2$ utilizando la definición y halla su valor en $x_0 = 3$.
Solución: $y'(3) = -6$
8. Calcula la derivada de $f(x) = \frac{1}{x^3}$ utilizando la definición y halla su valor en $x_0 = 2$.
Solución: $f'(2) = -\frac{3}{16}$
9. Calcula la derivada de $f(x) = \sqrt{x-2}$ utilizando la definición y halla su valor en $x_0 = 6$.
Solución: $f'(6) = \frac{1}{4}$
10. Calcula la derivada de la función $f(x) = \frac{2}{x}$ utilizando la definición y halla su valor en $x_0 = 2$.
Solución: $f'(2) = -\frac{1}{2}$

3.- REGLAS DE DERIVACIÓN

Calcula las siguientes derivadas simplificando al máximo, el resultado obtenido:

11. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$
Solución: $\frac{2x^3 - 1}{x^2}$

12. a) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{2x^3}$, b) $g(x) = L(x^2-3x)$

Solución: a) $f'(x) = \frac{-x^2 + 4x - 3}{2x^4}$, b) $g'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x}$.

13. a) $f(x) = L\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$, b) $g(x) = L\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

Solución: a) $f'(x) = \frac{1}{\sin x}$, b) $g'(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

14. a) $f(x) = L\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$, b) $g(x) = L\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}$

Solución: a) $f'(x) = \frac{-2x}{x^4-1}$, b) $g'(x) = \frac{1}{\cos x}$.

15. a) $f(x) = L(\sqrt{\operatorname{sen} 2x})$, b) $g(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{\operatorname{tg} x})$

Solución: a) $f'(x) = \operatorname{ctg}(2x)$, b) $g'(x) = \frac{\cos(\sqrt{\operatorname{tg} x})}{2\sqrt{\operatorname{tg} x} \cdot \cos^2 x}$.

16. a) $f(x) = \frac{L(x)}{x}$, b) $g(x) = L(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x^2)$

Solución: a) $f'(x) = \frac{1-L(x)}{x^2}$, b) $g'(x) = \frac{2x}{\operatorname{arc} \operatorname{sen}(x^2)\sqrt{1-x^4}}$.

17. a) $f(x) = x^{2/3}$, b) $g(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$

Solución: a) $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$, b) $g'(x) = \frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$.

18. a) $f(x) = L(\operatorname{tg} x)$, b) $g(x) = \frac{L(\operatorname{sen} x)}{(3x-1)^2}$

Solución: a) $f'(x) = \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}$, b) $g'(x) = \frac{(3x-1)\cos x - 6\operatorname{sen} x L(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x(3x-1)^3}$

19. a) $f(x) = \frac{(2x+2)^2}{(3x-1)^2}$,

b) $g(x) = \frac{e^x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$

Solución: a) $f'(x) = \frac{-16(2x+2)}{(3x-1)^3}$, b) $g'(x) = e^x \cdot \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x + \cos x \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x(1+\operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x}$

20. a) $f(x) = L\left(\frac{1-\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen} 2x}\right)$,

b) $g(x) = \sqrt[5]{\operatorname{Ln} x}$

Solución: a) $f'(x) = \frac{-2}{\cos 2x}$, b) $g'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{\operatorname{Ln}^4 x}} \frac{1}{x}$

4.- RECTAS TANGENTE Y NORMAL

21. Halla las rectas tangente y normal a $f(x) = x^2$ en $x_0 = 0$.
Solución: Tangente: $y = 0$. Normal: $x = 0$.
22. Halla las rectas tangente y normal a $y = \frac{1}{x}$ en $x_0 = 1$.
Solución: Tangente: $y = -x+2$. Normal: $y = x$
23. Halla la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en el punto $x_0 = 1$.
Solución: $f'(1) = -3$.
24. Halla la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = \frac{-1}{x}$ en el punto $x_0 = -1$.
Solución: $f'(-1) = 1$
25. Calcula a para que la recta tangente a la función $y = x^2 + ax$ en el punto $x = -1$, sea paralela al eje de abscisas.
Solución: $a = 2$.
26. Calcula la recta tangente a la curva $y = x^3 - x$ en los puntos en los que esta recta es horizontal.
Solución: En $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ la tangente es $y = \frac{-2\sqrt{3}}{9}$. En $x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ la tangente es $y = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.
27. Prueba que $y = -x$ es tangente a $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Halla el punto de tangencia y estudia si esa recta corta a la curva en otro punto distinto del de tangencia.
Solución: Punto de tangencia $(3, -3)$ y punto de corte $(0, 0)$.
28. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x^2 - 3$ en el punto de abscisa $x = 1$.
Solución: $y = 4x - 5$.
29. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{x-1}$ en el punto de abscisa $x = 2$.
Solución: $y = -x + 3$.
30. Halla el punto de la curva $y = 2x - x^2$ en el que la tangente tiene de pendiente 2. Halla la ecuación de dicha tangente.
Solución: $x = 0$, $y = x$.

5.- MONOTONÍA Y OPTIMIZACIÓN

31. Averigua si es creciente o decreciente la función $f(x) = x + \frac{x^2}{5}$ en $x = 0$.
Solución: Creciente, $f'(0) = 1 > 0$.
32. Averigua si es creciente o decreciente la función $f(x) = \frac{5-x}{x^2+2}$ en $x = 1$.
Solución: Decreciente
33. Halla el conjunto de puntos para los cuales la función $y = x^2 - 3x - 4$ es creciente o decreciente.
Solución: Creciente en $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$, decreciente en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

34. Estudia para qué valores de x está definida la función $f(x)=L[(x-1)(x-2)]$ y en qué valores es creciente o decreciente.
Solución: Está definida en $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$. Es decreciente en $(-\infty, 1)$ y creciente en $(2, \infty)$.
35. Considera la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = (3-2x^2)e^x$
 Estudia el crecimiento y el decrecimiento de f .
*Solución: Creciente en $\left(-1 - \frac{\sqrt{10}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.
 Decreciente en $\left(-\infty, -1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \cup \left(-1 + \frac{\sqrt{10}}{2}, \infty\right)$*
36. Estudia el crecimiento y el decrecimiento de $y = 3x^2 - 5x$
Solución: Decreciente en $\left(-\infty, \frac{5}{6}\right)$. Creciente en $\left(\frac{5}{6}, +\infty\right)$
37. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^4 e^x$. Calcula también sus máximos y mínimos relativos.
Solución: Crecimiento $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$. Decrecimiento $(-4, 0)$. Máximo $\left(-4, \frac{256}{e^4}\right)$, Mínimo $(0, 0)$
38. Determina si la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ posee puntos donde alcance valores máximos o mínimos locales, y, en caso afirmativo, calcúlalos.
Solución: Máximo en $M = (0, 1)$. Mínimos en $m_1 = (-1, 0)$ y $m_2 = (1, 0)$.
39. Halla los extremos relativos de la función $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$
Solución: Máximo $\left(-2, \frac{10}{3}\right)$, Mínimo $\left(1, -\frac{7}{6}\right)$
40. Halla los extremos relativos de la función $f(x) = \frac{x^2}{x+4}$
Solución: Existe máximo en $(-8, -16)$ y mínimo en $(0, 0)$
41. Halla los máximos y mínimos de $y = x^3$
Solución: No hay ni máximos, ni mínimos.

6.- OPTIMIZACIÓN

42. La función $y = |x|$ ¿Presenta un mínimo absoluto en algún punto? ¿dónde es derivable?
Solución: En $x = 0$. En $\mathbf{R} - \{0\}$.
43. Dada la función $y = Ax^3 + Bx$, hallar A y B para que tenga un mínimo en el punto $(2, -48)$
Solución: $A = 3, B = -36$
44. La curva dada por $y = x^2 + ax + b$ pasa por el punto $P = (-2, 1)$ y alcanza un extremo relativo en $x = -3$. Halla a y b .
Solución: $a = 6, b = 9$.
45. Halla a, b, c, d , en la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para que tenga un máximo en el punto $(0, 4)$ y un mínimo en el $(2, 0)$.
Solución: $a = 1, b = -3, c = 0, d = 4$.

46. Cómo hay que doblar un trozo de alambre de 4 metros de longitud para que forme un rectángulo cuya área sea lo más grande posible?
Solución: habrá que doblarlo formando un cuadrado de 1 metro de lado.
47. Un depósito de chapa y abierto de base cuadrada, debe tener capacidad para 13.500 litros. ¿Cuáles han de ser sus dimensiones para que se precise la menor cantidad de chapa?
Solución: $l = 30\text{dm}$, $h = 15\text{dm}$.
48. Halla dos números cuya suma sea 20 y su producto el mayor posible.
Solución: $x=10$, $y= 10$
49. Descompón el número 25 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo sea mínimo.
Solución: $x = 15$, $y = 10$.
50. Un consultorio médico abre a las 5 de la tarde y cierra cuando no hay pacientes. La expresión que representa el número medio de pacientes en función del tiempo en horas, t , que lleva abierto el consultorio es $N(t) = 4t-t^2$. ¿A qué hora el número medio de pacientes es máximo? ¿Cuál es ese máximo?
Solución: $t = 2$.

6.- CURVATURA

51. ¿Qué relación ha de existir entre a y b para que la función $f(x) = ax^2 + e^{-bx}$ tenga un punto de inflexión en $x = 0$?
Solución: La relación buscada es $b^2 = -2a$.
52. Estudia la concavidad o convexidad de $f(x) = x^5$
Solución: Es cóncava en $(-\infty, 0)$ y es convexa en $(0, \infty)$.
53. Halla b , c y d en la función $f(x) = x^3+bx^2+cx+d$ para que tenga un punto de inflexión de abscisa $x = 3$, pase por el punto $P = (1, 0)$ y alcance un mínimo en $x = 1$.
Solución: $f(x) = x^3-9x^2+15x-7$
54. Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función $f(x) = x^4-4x^3-18x^2+12x+2$
Solución: Cóncava en $(-\infty, -1)$ y $(3, +\infty)$. Convexa en $(-1,3)$. Puntos de inflexión: $(-1,32)$ y $(3, -96)$.
55. Estudia la concavidad, convexidad de la función $f(x) = xe^x$
Solución: Cóncava en $(-2, +\infty)$. Convexa en $(-\infty, -2)$.