9.- DERIVADAS

1.- DERIVADA EN UN PUNTO

1. Calcula la derivada de $y = 3x^3 + x$ en $x_o = 3$ utilizando la definición.
Solución: y'(3) = 82

2. Calcula la derivada de $3 - x^2$ en $x_o = 3$ utilizando la definición.
Solución: y '(3) = -6

3. Calcula la derivada de $f(x) = \frac{1}{x^3}$ en $x_o = 2$ utilizando la definición.
Solución: $f'(2) = -\frac{3}{16}$

4. Calcula la derivada de $f(x) = \sqrt{x - 2}$ en $x_o = 6$ utilizando la definición.
Solución: $f'(6) = \frac{1}{4}$

5. Calcula la derivada de la función $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x_o = 2$ utilizando la definición.
Solución: $f'(2) = -\frac{1}{2}$

2.- DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

6. Calcula la derivada de $y = 3x^3 + x$ utilizando la definición y halla su valor en $x_o = 3$.
Solución: y'(3) = 82

7. Calcula la derivada de $3 - x^2$ utilizando la definición y halla su valor en $x_o = 3$.
Solución: y '(3) = -6

8. Calcula la derivada de $f(x) = \frac{1}{x^3}$ utilizando la definición y halla su valor en $x_o = 2$.
Solución: $f'(2) = -\frac{3}{16}$

9. Calcula la derivada de $f(x) = \sqrt{x - 2}$ utilizando la definición y halla su valor en $x_o = 6$.
Solución: $f'(6) = \frac{1}{4}$

10. Calcula la derivada de la función $f(x) = \frac{2}{x}$ utilizando la definición y halla su valor en $x_o = 2$.
Solución: $f'(2) = -\frac{1}{2}$

3.- REGLAS DE DERIVACIÓN

Calcula las siguientes derivadas simplificando al máximo, el resultado obtenido:

11. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$
Solución: $\frac{2x^3 - 1}{x^2}$

12. a) f(x) = $\dfrac{(x-1)^2}{2x^3}$, b) g(x) = L(x^2-3x)

Solución: a) f '(x) = $\dfrac{-x^2+4x-3}{2x^4}$ *, b) g'(x) =* $\dfrac{2x-3}{x^2-3x}$.

13. a) f(x) = $L\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$, b) g(x) = $L\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$

Solución: a) f '(x) = $\dfrac{1}{\text{sen } x}$*, b) g'(x) =* $\dfrac{1}{x^2-1}$.

14. a) f(x) = $L\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$, b) g(x) = $L\sqrt{\dfrac{1+\text{sen}x}{1-\text{sen}x}}$

Solución: a) f '(x) = $\dfrac{-2x}{x^4-1}$*, b) g'(x) =* $\dfrac{1}{\cos x}$.

15. a) f(x) = $L(\sqrt{\text{sen } 2x})$, b) g(x) = $\text{sen}(\sqrt{\text{tg}x})$

Solución: a) f '(x) =ctg(2x), b) g'(x) = $\dfrac{\cos(\sqrt{\text{tg } x})}{2\sqrt{\text{tg } x}.\cos^2 x}$.

16. a) f(x) = $\dfrac{L(x)}{x}$, b) g(x) = L(arc sen x^2)

Solución: a) f '(x) = $\dfrac{1-L(x)}{x^2}$ *, b) g'(x) =* $\dfrac{2x}{\text{arc sen}(x^2)\sqrt{1-x^4}}$.

17. a) f(x) = $x^{2/3}$, b) g(x) = $\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$

Solución: a) f '(x) = $\dfrac{2}{3}x^{-1/3}$*, b) g'(x) =* $\dfrac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$.

18. a) f(x) = L(tg x), b) g(x) = $\dfrac{L(\text{sen}x)}{(3x-1)^2}$

Solución: a) f '(x) = $\dfrac{1+\text{tg}^2 x}{\text{tg } x}$ *, b) g'(x) =* $\dfrac{(3x-1).\cos x - 6\,\text{sen}x.L(\text{sen}x)}{\text{sen}x.(3x-1)^3}$

19. a) f(x) = $\dfrac{(2x+2)^2}{(3x-1)^2}$,

b) g(x) = $\dfrac{e^x.\text{sen}x}{\text{tg}x}$

Solución: a) f '(x) = $\dfrac{-16(2x+2)}{(3x-1)^3}$ *, b) g'(x) =* $e^x.\dfrac{\text{sen}x\,\text{tg}x + \cos x\,\text{tg}x - \text{sen}x(1+\text{tg}^2 x)}{\text{tg}^2 x}$

20. a) f(x) = $L\left(\dfrac{1-\text{sen } 2x}{1+\text{sen } 2x}\right)$,

b) g(x) = $\sqrt[5]{\text{Ln } x}$

Solución: a) f(x) $=\dfrac{-2}{\cos 2x}$*, b) g(x) =* $\dfrac{1}{5\sqrt[5]{\text{Ln}^4 x}}\dfrac{1}{x}$

4.- RECTAS TANGENTE Y NORMAL

21. Halla las rectas tangente y normal a $f(x) = x^2$ en $x_o = 0$.
Solución: Tangente: y = 0. Normal: x = 0.

22. Halla las rectas tangente y normal a $y = \frac{1}{x}$ en $x_o = 1$.
Solución: Tangente: y = -x+2. Normal: y = x

23. Halla la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)= x^3-3x^2+1$ en el punto $x_0 =1$.
Solución: f' (1) = -3.

24. Halla la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = \frac{-1}{x}$ en el punto $x_0 = -1$.
Solución: f' (-1) = 1

25. Calcula a para que la recta tangente a la función $y = x^2+ax$ en el punto $x = -1$, sea paralela al eje de abscisas.
Solución: a = 2.

26. Calcula la recta tangente a la curva $y = x^3-x$ en los puntos en los que esta recta es horizontal.
Solución: En x = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ *la tangente es y =* $\frac{-2\sqrt{3}}{9}$. *En x =* $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ *la tangente es y =* $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

27. Prueba que $y = -x$ es tangente a $y = x^3-6x^2+8x$. Halla el punto de tangencia y estudia si esa recta corta a la curva en otro punto distinto del de tangencia.
Solución: Punto de tangencia (3, -3) y punto de corte (0, 0).

28. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x^2-3$ en el punto de abscisa $x = 1$.
Solución: y = 4x-5.

29. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{x-1}$ en el punto de abscisa $x = 2$.
Solución: y = -x+3.

30. Halla el punto de la curva $y = 2x-x^2$ en el que la tangente tiene de pendiente 2. Halla la ecuación de dicha tangente.
Solución: x = 0, y = x.

5.- MONOTONÍA Y OPTIMIZACIÓN

31. Averigua si es creciente o decreciente la función $f(x) = x + \frac{x^2}{5}$ en $x = 0$.
Solución: Creciente, f'(0) = 1 > 0.

32. Averigua si es creciente o decreciente la función $f(x) = \frac{5 - x}{x^2 + 2}$ en $x = 1$.
Solución: Decreciente

33. Halla el conjunto de puntos para los cuales la función $y = x^2-3x-4$ es creciente o decreciente.
Solución: Creciente en $\left(\frac{3}{2},\infty\right)$, *decreciente en* $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$

34. Estudia para qué valores de x está definida la función f(x)=L[(x-1)(x-2)] y en qué valores es creciente o decreciente.
Solución: Está definida en $(-\infty, 1)\cup(2, \infty)$*. Es decreciente en* $(-\infty, 1)$ *y creciente en* $(2, \infty)$.

35. Considera la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (3-2x^2)e^x$
Estudia el crecimiento y el decrecimiento de f.
Solución: Creciente en $\left(-1-\frac{\sqrt{10}}{2}, -1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.
Decreciente en $\left(-\infty, -1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \cup \left(-1+\frac{\sqrt{10}}{2}, \infty\right)$

36. Estudia el crecimiento y el decrecimiento de $y = 3x^2-5x$
Solución: Decreciente en $\left(-\infty, \frac{5}{6}\right)$. *Creciente en* $\left(\frac{5}{6}, +\infty\right)$

37. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^4e^x$. Calcula también sus máximos y mínimos relativos.
Solución: Crecimiento $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$. *Decrecimiento* $(-4,0)$. *Máximo* $\left(-4, \frac{256}{e^4}\right)$, *Mínimo* $(0,0)$

38. Determina si la función $f(x) = x^4 -2x^2 + 1$ posee puntos donde alcance valores máximos o mínimos locales, y, en caso afirmativo, calcúlalos.
Solución: Máximo en $M = (0, 1)$. *Mínimos en* $m_1 = (-1, 0)$ *y* $m_2 = (1, 0)$.

39. Halla los extremos relativos de la función $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$
Solución: Máximo $\left(-2, \frac{10}{3}\right)$, *Mínimo* $\left(1, -\frac{7}{6}\right)$

40. Halla los extremos relativos de las función $f(x) = \frac{x^2}{x+4}$
Solución: Existe máximo en (-8, -16) y mínimo en (0,0)

41. Halla los máximos y mínimos de $y = x^3$
Solución: No hay ni máximos, ni mínimos.

6.- OPTIMIZACIÓN

42. La función $y = |x|$ ¿Presenta un mínimo absoluto en algún punto? ¿dónde es derivable?
Solución: En x = 0. En $\mathbb{R}-\{0\}$.

43. Dada la función $y=Ax^3+Bx$, hallar A y B para que tenga un mínimo en el punto (2, -48)
Solución: A = 3, B = -36

44. La curva dada por $y = x^2 + ax + b$ pasa por el punto P = (-2, 1) y alcanza un extremo relativo en x = -3. Halla a y b.
Solución: a = 6, b = 9.

45. Halla a, b, c, d, en la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para que tenga un máximo en el punto (0, 4) y un mínimo en el (2, 0).
Solución: a = 1, b = -3, c = 0, d = 4.

46. Cómo hay que doblar un trozo de alambre de 4 metros de longitud para que forme un rectángulo cuya área sea lo más grande posible?
Solución: habrá que doblarlo formando un cuadrado de 1 metro de lado.

47. Un deposito de chapa y abierto de base cuadrada, debe tener capacidad para 13.500 litros. ¿Cuáles han de ser sus dimensiones para que se precise la menor cantidad de chapa?
Solución: l = 30dm, h = 15dm.

48. Halla dos números cuya suma sea 20 y su producto el mayor posible.
Solución: $x=10$, $y=10$

49. Descompón el número 25 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo sea mínimo.
Solución: $x = 15$, $y = 10$.

50. Un consultorio médico abre a las 5 de la tarde y cierra cuando no hay pacientes. La expresión que representa el número medio de pacientes en función del tiempo en horas, t, que lleva abierto el consultorio es $N(t) = 4t-t^2$ ¿A qué hora el número medio de pacientes es máximo? ¿Cuál es ese máximo?
Solución: $t = 2$.

6.- CURVATURA

51. ¿Qué relación ha de existir entre *a* y *b* para que la función $f(x) = ax^2 + e^{-bx}$ tenga un punto de inflexión en $x = 0$?
Solución: La relación buscada es $b^2 = -2a$.

52. Estudia la concavidad o convexidad de $f(x) = x^5$
Solución: Es cóncava en $(-\infty, 0)$ y es convexa en $(0, \infty)$.

53. Halla b, c y d en la función $f(x) = x^3+bx^2+cx+d$ para que tenga un punto de inflexión de abscisa $x = 3$, pase por el punto $P = (1, 0)$ y alcance un mínimo en $x = 1$.
Solución: $f(x) = x^3-9x^2+15x-7$

54. Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función
$f(x) = x^4-4x^3-18x^2+12x+2$
Solución: Cóncava en $(-\infty, -1)\cup(3, +\infty)$. Convexa en $(-1,3)$. Puntos de inflexión: $(-1,32)$ y $(3, -96)$.

55. Estudia la concavidad, convexidad de la función $f(x) = xe^x$
Solución: Cóncava en $(-2, +\infty)$. Convexa en $(-\infty, -2)$.