PÁGINA 294

ACTIVIDADES FINALES

16. Calcula las derivadas de las siguientes funciones potenciales:

a) $D[x^6]$

b) $D\left[\dfrac{7}{x^5}\right]$

c) $D\left[8\sqrt[4]{x}\right]$

d) $D[3x^2 - x + 4]$

e) $D[(x^2 + x)^4]$

f) $D\left[\dfrac{5x}{4 + 5x}\right]$

g) $D\left[\dfrac{1}{(x^5 - x^2 + 3)^5}\right]$

h) $D\left[\dfrac{x^2 - 1}{4}\right]$

i) $D\left[\dfrac{3}{\sqrt{4x^2 + 5}}\right]$

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones exponenciales:

a) $D\left[4^{\frac{3}{x}}\right]$

b) $D[3 \cdot 2^x]$

c) $D[e^{2x^2} - e^x - 2]$

d) $D[2^{x^2} \cdot 3^{x^2}]$

e) $D\left[\dfrac{e^{-2x}}{4}\right]$

f) $D[(e^{2x} + 1)^3]$

18. Calcula las derivadas de las siguientes funciones logarítmicas:

a) $D[\ln(x^2 + 7)]$

b) $D[\ln(e^x + 2)]$

c) $D[\ln(3 - 4x^3)^5]$

d) $D[\ln \sqrt[3]{3x^2 + 1}]$

e) $D[\log_2(x^2 + 1)]$

f) $D\left[\ln\left(\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\right)\right]$

g) $D[\ln(\ln x)]$

h) $D[\ln(x \cdot \sqrt{4 - x^2})]$

i) $D\left[\ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)\right]$

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones trigonométricas y de sus inversas:

a) $D[\operatorname{sen} 4x]$

b) $D[4 \operatorname{sen} x]$

c) $D\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{4}\right)\right]$

d) $D\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{4}{x}\right)\right]$

e) $D[\operatorname{sen} x^4]$

f) $D[\operatorname{sen}^4 x]$

g) $D[\operatorname{arcsen} \sqrt{x - 1}]$

h) $D[\operatorname{sen} x^{-4}]$

i) $D[\sqrt[4]{\operatorname{sen} x}]$

j) $D[\cos(x + 1)]$

k) $D[\cos^3(x^3 + 1)]$

l) $D[\operatorname{arctg}(2x + 1)^2]$

m) $D[\operatorname{tg}(x^2 + 2)]$

n) $D[\operatorname{tg} \sqrt{x}]$

ñ) $D[\operatorname{tg}^3(x + 1)]$

o) $D[\arccos(\ln x)]$

p) $D[\operatorname{tg}(3^x)]$

q) $D[\sqrt{\operatorname{tg} x}]$

20. Calcula las derivadas que se indican:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + 2x^4}}{x}$; $Df(1)$

b) $g(x) = \ln[x + \sqrt{4 + x^2}]$; $Dg(0)$

c) $h(x) = \operatorname{sen}^2 3x - \cos^2 3x$; $Dh(\pi)$

d) $j(x) = \dfrac{2^x}{2^x + 1}$; $Dj(-1)$

21. Dada la función $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + x^2 - ax + 5$, calcula el valor de a, para que $Df(1) = -3$.

Haz un estudio análogo para la función $g(x) = \dfrac{x^2 - x - a}{x + 1}$, siendo $Dg(1) = 0$.

16. Quedan:

a) $D\left[x^6\right]=6x^5$

b) $D\left[\dfrac{7}{x^5}\right]=D\left[7x^{-5}\right]=-7\cdot 5x^{-6}=\dfrac{-35}{x^6}$

c) $D\left[8\sqrt[4]{x}\right]=D\left[8x^{1/4}\right]=\dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$

d) $D\left[3x^2-x+4\right]=6x-1$

e) $D\left[\left(x^2+x\right)^4\right]=(8x+4)\left(x^2+x\right)^3$

f) $D\left[\dfrac{5x}{4+5x}\right]=\dfrac{20}{(4+5x)^2}$

g) $D\left[\dfrac{1}{\left(x^5-x^2+3\right)^5}\right]=D\left[\left(x^5-x^2+3\right)^{-5}\right]=\dfrac{-25x^4+10x}{\left(x^5-x^2+3\right)^6}$

h) $D\left[\dfrac{x^2-1}{4}\right]=\dfrac{x}{2}$

i) $D\left[\dfrac{3}{\sqrt{4x^2+5}}\right]=\dfrac{-12x}{\sqrt{\left(4x^2+5\right)^3}}$

17. Las derivadas quedan:

a) $D\left[4^{\frac{3}{x}}\right]=4^{\frac{3}{x}}\cdot\ln 4\cdot\left(\dfrac{-3}{x^2}\right)$

b) $D\left[3\cdot 2^x\right]=3\cdot 2^x\cdot\ln 2$

c) $D\left[e^{2x^2}-e^x-2\right]=e^{2x^2}\cdot 4x-e^x$

d) $D\left[2^{x^2}\cdot 3^{x^2}\right]=D\left[6^{x^2}\right]=6^{x^2}\cdot 2x\cdot\ln 6$

e) $D\left[\dfrac{e^{-2x}}{4}\right]=\dfrac{-e^{-2x}}{2}$

f) $D\left[\left(e^{2x}+1\right)^3\right]=6\cdot e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)^2$

18. Las derivadas quedan:

a) $D\left[\ln\left(x^2+7\right)\right]=\dfrac{2x}{x^2+7}$

b) $D\left[\ln\left(e^x+2\right)\right]=\dfrac{e^x}{e^x+2}$

c) $D\left[\ln\left(3-4x^3\right)^5\right]=D\left[5\cdot\ln\left(3-4x^3\right)\right]=5\cdot\dfrac{-12x^2}{3-4x^3}=\dfrac{-60x^2}{3-4x^3}$

d) $D\left[\ln\sqrt[3]{3x^2+1}\right]=D\left[\dfrac{1}{3}\ln\left(3x^2+1\right)\right]=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{6x}{3x^2+1}=\dfrac{2x}{3x^2+1}$

e) $D\left[\log_2\left(x^2+1\right)\right]=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)\ln 2}$

f) $D\left[\ln\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right]=D\left[\ln\left(1-\sqrt{x}\right)-\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right]=\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{-\sqrt{x}}{x-x^2}$

g) $D\left[\ln\left(\ln x\right)\right]=\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\ln x}=\dfrac{1}{x\cdot\ln x}$

h) $D\left[\ln\left(x\cdot\sqrt{4-x^2}\right)\right]=D\left[\ln x+\dfrac{1}{2}\ln\left(4-x^2\right)\right]=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-2x}{4-x^2}=\dfrac{4-2x^2}{x\left(4-x^2\right)}$

i) $D\left[\ln\dfrac{1+x}{1-x}\right]=D\left[\ln\left(1+x\right)-\ln\left(1-x\right)\right]=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{-1}{1-x}=\dfrac{2}{1-x^2}$

19. Las derivadas quedan:

a) $D\left[\operatorname{sen} 4x\right]=4\cdot\cos 4x$

b) $D\left[4\operatorname{sen} x\right]=4\cdot\cos x$

c) $D\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{4}\right)\right]=\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x}{4}$

d) $$D\left[\operatorname{sen}\left(\frac{4}{x}\right)\right]=-\frac{4}{x^2}\cdot\cos\left(\frac{4}{x}\right)$$

e) $$D\left[\operatorname{sen} x^4\right]=4x^3\cdot\cos x^4$$

f) $$D\left[\operatorname{sen}^4 x\right]=D\left[(\operatorname{sen} x)^4\right]=4\cdot\operatorname{sen}^3 x\cdot\cos x$$

g) $$D\left[\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x-1}\right]=\frac{1}{2\cdot\sqrt{3x-2-x^2}}$$

h) $$D\left[\operatorname{sen} x^{-4}\right]=\frac{-4\cdot\cos\left(x^{-4}\right)}{x^5}$$

i) $$D\left[\sqrt[4]{\operatorname{sen} x}\right]=\frac{\cos x}{4\sqrt[4]{\operatorname{sen}^3 x}}$$

j) $$D\left[\cos(x+1)\right]=-\operatorname{sen}(x+1)$$

k) $$D\left[\cos^3\left(x^3+1\right)\right]=-9x^2\cdot\cos^2\left(x^3+1\right)\cdot\operatorname{sen}\left(x^3+1\right)$$

l) $$D\left[\operatorname{arc\,tg}(2x+1)^2\right]=\frac{4x+2}{8x^4+16x^3+12x^2+4x+1}$$

m) $$D\left[\operatorname{tg}\left(x^2+2\right)\right]=\frac{2x}{\cos^2\left(x^2+2\right)}$$

n) $$D\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$$

ñ) $$D\left[\operatorname{tg}^3(x+1)\right]=\frac{3\operatorname{tg}^2(x+1)}{\cos^2(x+1)}$$

o) $$D\left[\operatorname{arc\,cos}(\ln x)\right]=\frac{-1}{x\cdot\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

p) $$D\left[\operatorname{tg}(3^x)\right]=\frac{3^x\cdot\ln 3}{\cos^2 3^x}$$

q) $$D\left[\sqrt{\operatorname{tg} x}\right]=\frac{1}{2\cos^2 x\cdot\sqrt{\operatorname{tg} x}}$$

20. Las derivadas quedan:

a) $D[f(x)] = \dfrac{2x^4 - 1}{x^2\sqrt{1+2x^2}} \Rightarrow D[f(1)] = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b) $D[g(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}} \Rightarrow D[g(0)] = \dfrac{1}{2}$

c) $D[h(x)] = 12 \operatorname{sen} 3x \cdot \cos 3x \Rightarrow D[h(\pi)] = 0$

d) $D[j(x)] = \dfrac{2^x \cdot \ln 2}{\left(2^x + 1\right)^2} \Rightarrow D[j(-1)] = \dfrac{2 \ln 2}{9}$

21. El estudio en cada caso queda:

- $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + x^2 - ax + 5 \Rightarrow D[f(x)] = 8x^3 + 9x^2 + 2x - a \Rightarrow D[f(1)] = 19 - a = -3 \Rightarrow a = 22$
- $g(x) = \dfrac{x^2 - x - a}{x+1} \Rightarrow D[g(x)] = \dfrac{x^2 + 2x + a - 1}{(x+1)^2} \Rightarrow D[g(1)] = \dfrac{2+a}{4} = 0 \Rightarrow a = -2$

PÁGINA 295

■ 22. Calcula las derivadas que se indican a continuación:

a) $D[(1-x)\sqrt{1+x}]$

b) $D[(x^2-1)^2 \cdot 5^{2x}]$

c) $D[2^x \cdot \ln 2]$

d) $D\left[\ln\left(\dfrac{1+\text{sen}\, x}{1-\text{sen}\, x}\right)\right]$

e) $D[x^2 \ln x + x \ln x^2]$

f) $D[\text{sen}\, x \cdot 3^{2x}]$

g) $D\left[\dfrac{2^{3x}}{x^2}\right]$

h) $D\left[\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right]$

i) $D\left[\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)\right]$

j) $D[x^{2a} \cdot a^{2x} \cdot e^{-x}]$

k) $D[\ln\sqrt{x(2-x)}]$

l) $D\left[\text{arctg}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]$

m) $D[\text{tg}^2 \sqrt{x}]$

n) $D[\ln(e^x - 5x^4)]$

ñ) $D[(\text{sen}\, 2x)^{\cos x}]$

o) $D[\ln(\text{tg}\, x)]$

p) $D[(x^2+1)^{7x}]$

q) $D\left[\dfrac{2x^2+1}{2x^2-1}\right]$

r) $D\left[\sqrt[4]{x^4-2}\right]$

s) $D[\text{arctg}^2 \sqrt{x}]$

t) $D[10^{\sqrt{x}} \cdot \ln\sqrt{x} \cdot (2x)^8]$

u) $D\left[\text{arcsen}\, \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

v) $D[\ln(\ln \cos x)]$

w) $D[\text{sen}^4 x^3 \cdot \cos^3 x^4]$

x) $D\left[\dfrac{1}{1+x} + \ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)\right]$

y) $D[2^x \cdot \sqrt{4+2^x}]$

z) $D\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\right]$

■ 23. La trayectoria que sigue una motora viene dada por $e(t) = -t^3 + 9t^2 + 5$, donde e viene dado en kilómetros y t en horas.
Halla la velocidad instantánea a las 4 horas ($t = 4$ h).
¿Al cabo de cuánto tiempo la velocidad se anula?

■ 24. Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$, calcula $f^{(10)}(x)$.

■ 25. Calcula los valores de x para los cuales $D[f(x)] > 0$, siendo $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12$.

■ 26. Calcula $f^{(2003)}(x)$ para la función $f(x) = e^{-2x}$.

■ 27. ¿En qué punto la función $f(x) = -3x^2 + 7x - 2$ tiene una tangente que forma un ángulo de 45° con el eje OX?

■ 28. Halla la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $4x^2 - y^2 = 4$ en el punto $(\sqrt{5}, 4)$.

■ 29. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $x^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ en el punto de abscisa 8.

22. Las derivadas quedan:

a) $D\left[(1-x)\sqrt{1+x}\right]=-1\sqrt{1+x}+\dfrac{1-x}{2\sqrt{1+x}}=\dfrac{-1-3x}{2\sqrt{1+x}}$

b) $D\left[(x^2-1)\cdot 5^{2x}\right]=2x\cdot 5^{2x}+5^{2x}\cdot \ln 5\cdot 2\cdot (x^2-1)$

c) $D\left[2^x\cdot \ln 2\right]=2^x\cdot (\ln 2)^2$

d) $D\left[\ln\left(\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right)\right]=\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}-\dfrac{-\cos x}{1-\operatorname{sen} x}=\dfrac{2}{\cos x}$

e) $D\left[x^2\ln x+x\ \ln x^2\right]=2x\cdot \ln x+\dfrac{x^2}{x}+2\ln x+2=2x\cdot \ln x+x+2\ln x+2$

f) $D\left[\operatorname{sen} x\cdot 3^{2x}\right]=\cos x\cdot 3^{2x}+3^{2x}\cdot 2\cdot \ln 3\cdot \operatorname{sen} x$

g) $D\left[\dfrac{2^{3x}}{x^2}\right]=\dfrac{2^{3x}\cdot 3\cdot \ln 2\cdot x^2-2x\cdot 2^{3x}}{x^4}=\dfrac{2^{3x}(3x\ln 2-2)}{x^3}$

h) $D\left[\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right]=\dfrac{-\operatorname{sen} x\,(1-\cos x)-\operatorname{sen} x\ (1+\cos x)}{2\,(1-\cos x)^2\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}}=\dfrac{-1}{1-\cos x}$

i) $D\left[\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)\right]=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{x^2+9}=\dfrac{9}{x\,(x^2+9)}$

j) $D\left[x^{2a}\cdot a^{2x}\cdot e^{-x}\right]=2ax^{2a-1}\cdot a^{2x}\cdot e^{-x}+a^{2x}\cdot \ln a\cdot 2\cdot x^{2a}\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot x^{2a}\cdot a^{2x}$

$=x^{2a}\cdot a^{2x}\cdot e^{-x}\left(\dfrac{2a}{x}+2\ln a-1\right)$

k) $D\left[\ln\sqrt{x(2-x)}\right]=D\left[\dfrac{1}{2}\ln x+\dfrac{1}{2}\ln(2-x)\right]=\dfrac{1-x}{x\,(2-x)}$

l) $D\left[\text{arc tg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{1}{x^2+1}$

m) $D\left[\text{tg}^2\sqrt{x}\right]=2\,(\text{tg}\sqrt{x})\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\text{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$

n) $D\left[\ln(e^x-5x^4)\right]=\frac{e^x-20x^3}{e^x-5x^4}$

ñ) $D\left[(\text{sen}\,2x)^{\cos x}\right]=2\cos x\,(\text{sen}\,2x)^{\cos x-1}\cdot\left[\cos 2x-(\text{sen}\,x)^2\ln(\text{sen}\,2x)\right]$

o) $D\left[\ln\text{tg}\,x\right]=\frac{1}{\text{sen}\,x\cdot\cos x}$

p) $D\left[(x^2-1)^{7x}\right]=7(x^2-1)^{7x-1}\cdot\left[2x^2+(x^2-1)\ln(x^2-1)\right]$

q) $D\left[\frac{2x^2+1}{2x^2-1}\right]=\frac{4x\,(2x^2-1)-4x\,(2x^2+1)}{(2x^2-1)^2}=\frac{-8x}{(2x^2-1)^2}$

r) $D\left[\sqrt[4]{x^4-2}\right]=\frac{4x^3}{4\sqrt[4]{(x^4-2)^3}}=\frac{x^3}{\sqrt[4]{(x^4-2)^3}}$

s) $D\left[\text{arc tg}^2\sqrt{x}\right]=2\cdot\text{arc tg}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot(1+x)}=\frac{\text{arc tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}$

t) $D\left[10^{\sqrt{x}}\cdot\ln\sqrt{x}\cdot(2x)^8\right]=\frac{10^{\sqrt{x}}\cdot\ln 10}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\sqrt{x}\cdot(2x)^8+\frac{1}{2x}\cdot 10^{\sqrt{x}}\cdot(2x)^8+16\,(2x)^7\cdot 10^{\sqrt{x}}\cdot\ln\sqrt{x}$

u) $D\left[\text{arc sen}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}$

v) $D\left[\ln(\ln\cos x)\right]=\dfrac{-\text{sen}\,x}{\cos x\cdot\ln(\cos x)}$

w) $D\left[\text{sen}^4 x^3\cdot\cos^3 x^4\right]=4\,\text{sen}^3 x^3\cdot\cos x^3\cdot 3x^2\cdot\cos^3 x^4-3\cdot\cos^2 x^4\cdot\text{sen}\,x^4\cdot 4x^3\cdot\text{sen}^4 x^3$

x) $D\left[\dfrac{1}{1+x}+\ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)\right]=\dfrac{-1}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{-2-x}{(1+x)^2}$

y) $D\left[2^x\cdot\sqrt{4+2^x}\right]=2^x\cdot\ln 2\cdot\sqrt{4+2^x}+\dfrac{2^x\cdot\ln 2\cdot 2^x}{2\sqrt{4+2^x}}=\dfrac{2^x\cdot\ln 2\,(8+3\cdot 2^x)}{2\sqrt{4+2^x}}$

z) $D\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\right]=\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x}-\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{-2}{\sqrt{x^2+1}}$

23. Queda:

La velocidad viene dada por la expresión: $v(t)=e'(t)=-3t^2+18t$

La velocidad instantánea en $t=4$ es $v(4)=24\,\text{km}/\text{h}$

La velocidad se anula es: $0=-3t^2+18t \;\Rightarrow\; t=0$ y $t=6$.

Al cabo de 6 horas se anula.

24. Queda:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot n!}{(x-1)^{n+1}} \quad\Rightarrow\quad f^{(10)}(x)=\frac{2\cdot 10!}{(x-1)^{11}}$$

25. La derivada queda: $D\left[f(x)\right]=3x^2-12x>0$ y el intervalo resultante es: $x\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$

26. Queda:

$$f^{(n)}(x)=(-2)^n\cdot e^{-2x} \quad\Rightarrow\quad f^{(2\,003)}(x)=-2^{2\,003}\cdot e^{-2x}$$

27. El punto buscado es el punto en el que la pendiente de la recta tangente valga 1.

$$f'(x)=-6x+7=1 \;\Rightarrow\; x=1 \;\Rightarrow\; \text{El punto es } P(1,2).$$

28. La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada en el punto dado.

Derivamos la función en implícitas: $8x-2yy'=0 \;\Rightarrow\; y'=\dfrac{4x}{y} \;\Rightarrow\; m=\sqrt{5}$

Por tanto, la ecuación de la recta queda: $y-4=\sqrt{5}\left(x-\sqrt{5}\right) \;\Rightarrow\; y=\sqrt{5}x-1$

29. El punto es $P(8,6)$.

La pendiente de la recta es: $2x-8-2y'=0 \;\Rightarrow\; y'=x-4 \;\Rightarrow\; y'(8)=8-4 \;\Rightarrow\; m=4$

Por tanto, la ecuación de la recta es: $y-6=4(x-8) \;\Rightarrow\; y=4x-26$