

Problema 1 (1 puntos) Descompón el siguiente polinomio como producto de factores de grado uno:

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 8x - 6$$

Solución:

$$P(x) = (x - 1)(x - 3)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

Problema 2 (2 puntos) Calcular las soluciones reales de:

$$\frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{x - 1}{x + 1}$$

Solución:

$$(x - 1) \cdot (x + 1) = (x^2 - 1) \cdot (x - 1)$$

$$x^2 - 1 = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Por Ruffini: $x = 2$, $x = 1$, $x = -1$, pero estas dos últimas soluciones no serían lógicas, ya que anulan el denominador de alguna de las fracciones.

Problema 3 (2 puntos) Halla las soluciones reales de:

$$\sqrt{x - 1} + \sqrt{x} = 2$$

Solución:

$$(\sqrt{x - 1})^2 = (2 - \sqrt{x})^2$$

$$x - 1 = 4 + (\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x}$$

$$x - x - 1 - 4 = -4\sqrt{x}$$

$$-5 = -4\sqrt{x}$$

$$(-5)^2 = (-4\sqrt{x})^2$$

$$25 = 16x \implies x = \frac{25}{16}$$

Problema 4 (3 puntos) Halla las soluciones de:

1.

$$3^{x^2+5x-4} \cdot 9^{2x+3} = 27^{x-1}$$

Solución:

$$3^{x^2+5x-4} \cdot 3^{2(2x+3)} = 3^{3(x-1)}$$

$$3^{x^2+5x-4+2(2x+3)} = 3^{3(x-1)}$$

$$x^2 + 5x - 4 + 4x + 6 = 3x - 3$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \implies x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{4}$$

$$x = \frac{-6 \pm 4}{2} \implies x = -1, x = -5$$

2.

$$\log_{10}(x^2 + 6x + 7) = 1 + \log_{10}(x + 1)$$

Solución:

$$\log_{10}(x^2 + 6x + 7) = \log_{10}10 + \log_{10}(x + 1)$$

$$\log_{10}(x^2 + 6x + 7) = \log_{10}10(x + 1)$$

$$x^2 + 6x + 7 = 10(x + 1)$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0 \implies x = 3, x = 1$$

Problema 5 (2 puntos) Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Solución:

Primero despejamos y en la primera ecuación $y = 5 - 2x$, y sustituimos en la segunda $x(5 - 2x) = 2 \implies 5x - 2x^2 = 2 \implies 2x^2 - 5x + 2 = 0 \implies x = 2, x = \frac{1}{2}$.

Cuando $x = 2$ tendremos $2y = 2 \implies y = 1$.

Cuando $x = \frac{1}{2}$ tendremos $\frac{y}{2} = 2 \implies y = 4$.