- Construye la gráfica de las funciones propuestas a continuación, y estudia el signo de las mismas:

(a) $y = -2x^2 - 6$;

(b) $y = 2(3-x)(x+2)$;

(c) $y = 3x^2 + x - 14$;

(d) $y = \frac{1}{2}\left[(2x+1)^2 - 16\right]$;

(e) $y = -\frac{9}{4}x^2 + 15x - 25$;

(f) $y = 3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - 9\right]$;

(g) $y = -\frac{2}{3}\left[(x-3)^2 - 2\right]$;

(h) $y = \frac{3}{4}(x+3)^2$;

(i) $f(x) = 3x + 1$.

- Determina el domino de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{7x-1}{x^2-9}$

(b) $f(x) = \dfrac{3-4x}{x^2+x-6}$

(c) $f(x) = \dfrac{8x^2-3}{5}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x+1}$

(e) $y = \log\left(x^2 - 4x + 3\right)$

(f) $y = \log\sqrt{16 - x^2}$

(g) $y = \ln\dfrac{x-1}{x+1}$

(h) $y = \dfrac{\ln\left(3 - x^2\right)}{\sqrt{x^2-1}}$

(i) $y = \dfrac{\sqrt{2x+5}}{-x - \sqrt{-2x}}$

(j) $y = \sqrt{\dfrac{-x+2}{-x^2 - x - 20}}$

(k) $y=\dfrac{\sqrt{-x^2+6x+27}}{\sqrt{5}-\sqrt{-x}}$

(l) $f(x)=\sqrt{5x-x^2-4}+\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

- Estudia los puntos de corte con los ejes de las funciones:

(a) $f(x)=\dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1}$ **(b)** $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x-6}}{\sqrt{x+5}}$

- Estudia la simetría de las siguientes funciones:

(a) $f(x)=x^4+x^2$

(b) $f(x)=x^3+3$

(c) $f(x)=\dfrac{x^4-x}{x}$

(d) $f(x)=\dfrac{x^5-x^3}{x}$

(e) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

- Sean las funciones siguientes. Siendo

$$f(x)=\frac{1}{x}-1;\quad g(x)=\frac{x-3}{x+3};\quad h(x)=\begin{cases}3 & si\ \ x\le -2\\ 3x+2 & si\ \ -2<x<4\\ \dfrac{2}{x} & si\ \ x>5\end{cases};\quad j(x)=\begin{cases}x^2-4 & si\ \ x\le 0\\ \dfrac{x+3}{x-1} & si\ \ x>0\end{cases}$$

Calcula:

(a) $f+g$

(b) $h(x)$ **:** $j(x)$

(c) $f \circ g,\ \ g \circ f$

(d) $(f-g)(-3)$

(e) $(f \circ g)(3)$

(f) $(h \circ j)(-1)$

- Representa gráficamente y estudia sus propiedades:

(a) $y = |3 - 6x|$

(b) $y = 4x - |x + 2|$

(c) $y = \dfrac{|2x - 3|}{2x - 3}$

(d) $y = |-x^2 + 2x|$

- Representa las funciones:

(a) $y = \cos x$

(b) $y = \cos 2x$

(c) $y = \cos \dfrac{x}{2}$

(d) $y = 2 \cos (2x + 2)$

(e) $y = 2 - 3 \cos (2x - 2)$

- Construye la gráfica de las funciones siguientes de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

(a) $g(x) = 4 \cdot 2^{2x}$

(b) $g(x) = 4 \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^x$

(c) $y = (9/2) \cdot 3^x$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot 4^x$

- Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 8x^2 + 20x - 16}$

(b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 4}$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 7}{5x^2 + 14x - 9}$

(d) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)$

(e) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$

(f) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^6+5x^3+1}}{\sqrt[4]{3x^8+2x^4-5}}$

(g) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2+4}{3x^2+5}\right]^{x^2+3}$

(h) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{2x-\sqrt{x^2+3}}$

(i) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$

(j) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-x}{4x^2+2}\right)^x$

(h) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$

- Halla a y b para que:

  (i) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+1}-x\right)=0$

  (ii) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{bx^2-5}}{bx-4}=2$

- Se considera la función: $f(x)=\frac{x^3+mx^2+nx+2}{x^3+2x^2-x-2}$. Halla m y n para que: $\lim_{x\to 1}f(x)=-1$.

- Halla a para que $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+ax}{x^2+1}\right)^x=\sqrt{e}$

- Tiene límite en el punto $x = 1$ la función: $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-7x+6}{x^2+5x-6} & si \quad x<1\\ \dfrac{x^2-1}{x^2-1} & si \quad x>1\end{cases}$

- Dada la función: $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+h & si \quad x<-3\\ \dfrac{x^2-9}{x^3+2x^2-2+6} & si \quad x>-3\end{cases}$

¿Qué valor debe tener h para que el límite de f en el punto $x = -3$ exista?

- Calcula las asíntotas de las curvas:

(a) $y=\dfrac{\left(x^2+x-5\right)\cdot x}{x^3-x}$

(b) $\mathrm{y}=\dfrac{x^3}{\left(x-1\right)^2}$

(c) $y=\dfrac{2x^2}{x-1}$

(d) $y=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}$

(e) $y=\dfrac{-x^3}{\left(x-1\right)^2}$

(f) $y=\log\ (1+x)$

(g) $y=\dfrac{e^x}{e^x-1}$

- Sea $f(x)=\dfrac{ax^4+bx^3+cx^2-2}{x^2+2x-5}$. Halla $f(x)$ para que $y=2x-1$ sea asíntota.

- Representa la siguiente función definida a trozos: $f(x)=\begin{cases}x & si & x\le 2\\ 2 & si & 2<x\le 3\\ x^2-6 & si & x>3\end{cases}$

- Representa la siguiente función a trozos: $f(x)=\begin{cases} -x-1 & si \quad x\le -1 \\ x^2-1 & si \quad -1<x\le 2 \\ \dfrac{3}{x} & si \quad x>2 \end{cases}$

- Estudia la continuidad: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{1-e^{\frac{1}{x-2}}} & si \quad x\ne 2 \\ 0 & si \quad x=2 \end{cases}$

- Estudia la continuidad de las siguientes funciones y, en su caso, clasifica sus discontinuidades:

(i) $f(x)=\dfrac{(x-2)(x+3)^2(x+4)}{(x+3)(x+4)^2(2x+3)}$; **(ii)** $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-x-1}{(x^4-1)^2(x^2+3x+5)}$;

(iii) $f(x)=\sqrt{2+\dfrac{1}{(x-3)^2}}$; **(iv)** $f(x)=\sqrt{-3x^2+4x-1}$;

(v) $f(x)=\begin{cases} x+3 & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{1}{x^2+x} & si \quad x>0 \end{cases}$; **(vi)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x+9}{x^2-9} & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{3}{x^3-4x} & si \quad x>0 \end{cases}$;

(vii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x-3}{x^2-3x+2} & si \quad x<1 \\ \dfrac{18x-36}{x(x-3)(x-4)} & si \quad x\ge 1 \end{cases}$; **(viii)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+3x-5}{4x^2-25} & si \quad x\le -2 \\ \dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x^2+2x} & si \quad x>-2 \end{cases}$.

- Sin utilizar ninguna representación gráfica, demuestra que la función que sigue no es continua para $x = 2$. $f(x)=\begin{cases} 3x & si \quad x<2 \\ 6 & si \quad x=2 \\ x-2 & si \quad x>2 \end{cases}$. ¿Es posible conseguir que f sea continua en $x=2$ cambiando solo el valor de $f(2)$?

- Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

  (a) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x}-\left(5x-x^2\right)^2$.

  (b) $g(x)=\left(x^2-1\right)\cdot Ln\ x$.

  (c) $h(x)=2^{5x}$.

  (d) $i(x)=\left(x^3-6x\right)\cdot\left(x^2+1\right)^3$.

- **(a)** Estudia la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+7 & si \quad x\le 3 \\ \dfrac{4}{x-2} & si \quad x>3 \end{cases}.$$

  (b) Calcula la derivada de $g(x)=\left(x+1\right)\cdot e^{2x+1}$.

- Estudia, según los valores de *a* y *b*, la continuidad y derivabilidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & x\le 0 \\ x^2+bx+a & x>0 \end{cases}$.

- Sabiendo que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=\begin{cases} ax+5 & si \quad x\le 1 \\ a\sqrt{x}+\dfrac{b}{x} & si \quad x>1 \end{cases}$ es derivable, halla *a* y *b*.

- Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<1 \\ -x^2+4x-2 & si \quad x\ge 1 \end{cases}$.

  (a) Analiza su continuidad y su derivabilidad.

  (b) Estudia la monotonía, determina sus extremos y analiza su curvatura.

  (c) Representa la gráfica de la función.

- Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & si \quad x\neq 0\\ 0 & si \quad x=0\end{cases}$.

  (a) Calcula los límites laterales de *f* en $x=0$. ¿Es continua *f* en $x=0$?

  (b) Calcula el valor de la derivada de *f* en $x=1$.

- Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}2^x & si \quad x<-2\\ \dfrac{2}{x} & si \quad x\geq -2\end{cases}$$

  (a) Estudia la continuidad y derivabilidad de *f*.

  (b) Calcula sus asíntotas.

  (c) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$.

- Sea la función: $f(x)=\begin{cases}-1 & si \quad -8\leq x<4\\ x+2 & si \quad -4\leq x<2\\ 8/x & si \quad 2\leq x\end{cases}$. Se pide:

  (a) Representa gráficamente *f*(*x*).

  (b) Estudia su derivabilidad.

  (c) Estudia la continuidad y crecimiento de *f*(*x*).

  (d) Obtén la gráfica de |*f*(*x*)|+1.

- **(a)** Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por la relación $f(x)=\left|-x^2+2x+3\right|+x^2-4x+1$.

  (b) Esboza la gráfica de dicha función.

- Calcula los máximos y mínimos relativos, estudia el crecimiento o decrecimiento así como concavidad y convexidad y asíntotas de las siguientes funciones:

  (a) $f(x) = x^3 Ln\ x - x^3$; **(b)** $g(x) = (x+2) Ln\ x$;

  (c) $h(x) = \dfrac{x}{Ln\ x}$; **(d)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{x^3+2x}{x^2+1}$. Sea *P* el punto de corte de la gráfica de *f* con su asíntota. Determina la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto *P*.

- Considera la curva de ecuación $y = x^2 - 2x + 3$.

  (a) Halla una recta que sea tangente a dicha curva y que forme un ángulo de 45º con el eje de abscisas.

  (b) ¿Hay algún punto de la curva en el que la recta tangente sea horizontal?. En caso afirmativo, halla la ecuación de dicha recta tangente; en caso negativo, explica por qué.

- Considera la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{Ln(x)}{x}$.

  (a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los extremos relativos de *f*.

  (b) Calcula la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de corte de dicha gráfica con el eje *OX*.

- **(a)** Calcula la ecuación de la recta tangente a $y = \dfrac{1}{x-1}$ en el punto de abscisa $x = 2$.

  (b) ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$, la recta tangente es paralela a $y = 3x - 5$?

  (c) Sea $g(x) = 2x^2 - 8x + a$. Halla *a* para que el valor mínimo de *g* sea 3.

- Determina p y q de manera que la curva representativa de la función $f(x) = x^2 + px + q$ pase por el punto (–2,1) y $f(x)$ presente un mínimo para $x = -3$.

- Encuentra las funciones polinómicas $ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya segunda derivada sea $x - 1$. ¿Cuál o cuáles de ellas tienen un mínimo en el punto (4, –1/3)?

- Determina una función polinómica de grado 3 sabiendo que verifica que alcanza un máximo en $x = 1$, que su gráfica pasa por el punto $(1,1)$ y que la recta de ecuación $y = x$ es tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 0$.

- **(a)** Determina los números reales m y n para los que la función $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{m}{\sqrt{x}} + n\sqrt{x}$ tenga un punto de inflexión en el punto $(1,4)$.

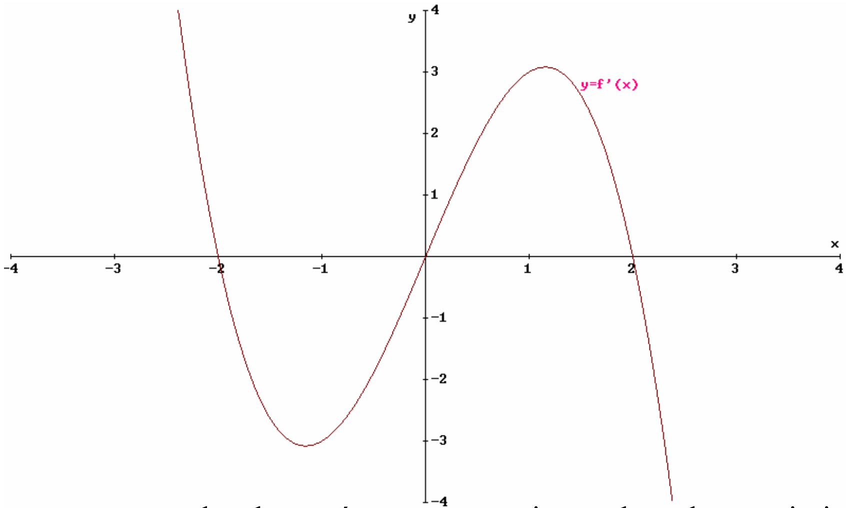
  (b) Determina el valor de la constante k sabiendo que la curva de ecuación $y = \frac{x^3 + kx^2 + 1}{x^2 + 1}$ posee una asíntota que pasa por el punto $(1,3)$.

- Determina el valor de las constantes a, b y c sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x\left(ax^2 + bx + c\right)$ tiene un punto de inflexión en $\left(-2,12\right)$ y que en dicho punto la recta tangente tiene por ecuación $10x + y + 8 = 0$.

- De la función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo en $x = -1$, y que su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa $x = -2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.

- Sean *f* y *g* las funciones definidas por $f(x)=a+bx^2+x^4$ y $g(x)=c-x^3$. Calcula los valores de *a*, *b*, $c\in\mathbb{R}$ de modo que las gráficas de *f* y *g* se corten en el punto $(1,1)$ y sean tangentes en dicho punto.

- De una función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se sabe que pasa por el punto $(2,0)$ y que la gráfica de su función derivada es la que muestra en la figura.



Determina sus extremos locales así como sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y, con estos elementos, esboza razonadamente la gráfica de *f*.

- De una función *f* se sabe que su función derivada es $f'(x)=3x^2-9x+6$.

  (a) Estudia la monotonía y la curvatura de *f*.

  (b) Sabiendo que la gráfica de *f* pasa por $(0,1)$, calcula la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

- Sea la función $f(x)=-x^3+6x^2-9x$.

  (a) Estudia la monotonía y calcula los extremos relativos de *f*.

  (b) Estudia la curvatura y calcula el punto de inflexión de *f*.

  (c) Representa gráficamente la función.

- Sea f la función definida para $x \neq 0$ por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

  (a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

  (b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

  (c) Esboza la gráfica de f.

- Sea f la función definida para $x \neq -2$ por $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$.

  (a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.

  (b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos de f.

  (c) Teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores, haz un esbozo de la gráfica de f.

- Representa gráficamente las siguientes funciones realizando los estudios necesarios:

  (a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-5x+4}$

  (b) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{2x^2-8}$

  (c) $y = \log \dfrac{x^2}{2x+1}$

  (d) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

  (e) $y = \dfrac{e^x}{e^x-1}$

  (f) $y = 2^x$

  (g) $f(x) = (x-1)e^x$

  (o) $y = \dfrac{|1-x|}{|x|}$

  (p) $y = |1-x^2|$

  (q) $y = \dfrac{|2-x|}{|x-2|}$

- En un modelo para los costes de almacenamiento y transporte de materiales para un proceso de manufactura, Lancaster (1.976) obtiene la siguiente función de coste:

$$C(x) = 100 \cdot (100 + 9x + \frac{144}{x})$$

donde $C(x)$ es el coste total (en dólares) de almacenamiento y transporte (durante tres meses) de x toneladas de material.

(a) ¿Qué cantidad de materiales hace que el coste sea mínimo?

(b) ¿Cuáles son las asíntotas de esta función?

(a) Representa dicha función para los valores de x.

- La temperatura *T*, en grados centígrados, que adquiere una pieza sometida a un proceso viene dada en función del tiempo *t*, en horas, por la expresión:

$$T(t) = 40t - 10t^2 \quad con \quad 0 \le t \le 4$$

(a) Represente gráficamente la función T y determine la temperatura máxima que alcanza la pieza.

(b) ¿Qué temperatura tendrá la pieza transcurrida 1 hora?. ¿Volverá a tener esa misma temperatura en algún otro momento?

- Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde un determinado punto. La altura en metros alcanzada al cabo de *t* segundos, viene dada por $h(t) = 5 - 5t - 5e^{-2t}$.

(a) Calcula el tiempo transcurrido hasta alcanzar la altura máxima y el valor de ésta.

(b) Teniendo en cuenta que la velocidad es $v(t) = h'(t)$, halla la velocidad al cabo de 2 segundos.

- Divide un segmento de un metro de longitud en tres partes, dos de las cuales sean tales que una tenga el doble de longitud de la otra, de modo que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre ellas sea mínima.

- ¿Cómo debe torcerse un hilo de alambre de longitud 10 cm. para formar un rectángulo de área máxima?

- El alcalde de un pueblo quiere cercar un recinto rectangular cerrado para celebrar las fiestas. Para ello aprovecha una tapia existente como uno de los lados y dispone de 300 m de tela metálica para hacer los otros tres lados. ¿Podrías indicar las dimensiones del recinto acotado de esa forma cuya área es la mayor posible? ¿Cuál es dicha área?

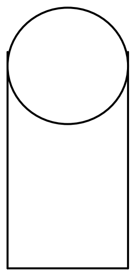
- Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm cada uno, y los laterales de 1 cm. Se piden las dimensiones de la hoja para las cuales el gasto de papel sea mínimo.

- A una placa de vidrio rectangular de dimensiones 15 y 10 cm, se le ha roto en una esquina un pedazo de forma triangular, de tal modo que la longitud ha disminuido en 5 cm y la anchura en 3 cm. De la parte restante se quiere formar una nueva placa rectangular de área máxima. ¿Cuáles serán sus dimensiones?.

- De todos los triángulos isósceles cuya base y altura suman 20 m., ¿qué base tiene el de área máxima?.

- Un recinto está formado por un rectángulo y un semicírculo que tiene por diámetro uno de los lados del rectángulo. El área del recinto es de 5 m^2. Calcula las dimensiones para que el perímetro sea mínimo.

- Se desea construir una ventana como la de la figura (en la que la parte superior es una semicircunferencia) que tenga un perímetro de 6 cm. ¿Qué dimensiones debe tener para que se superficie sea máxima?



- Una empresa quiere fabricar vasos de cristal de forma cilíndrica con una capacidad de 250 centímetros cúbicos. Para utilizar la mínima cantidad posible de cristal, se estudian las medidas apropiadas para que la superficie total del vaso sea mínima. ¿Cuál deben ser dichas medidas? Justifica la respuesta.