1) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{3x-1}$ y $g(x) = \dfrac{3x^2-2}{2x^4+7}$, hallar $g \circ f$.

$$g\circ f(x) = g[f(x)] = g[\sqrt{3x-1}\,] = \frac{3\left(\sqrt{3x-1}\right)^2-2}{2\left(\sqrt{3x-1}\right)^4+7} = \frac{3(3x-1)-2}{2(3x-1)^2+7} = \frac{9x-3-2}{2(9x^2-6x+1)+7} =$$

$$= \frac{9x-5}{18x^2-12x+2+7} = \boxed{\frac{9x-5}{18x^2-12x+9}}$$

2) Hallar $f^{-1}(x)$, siendo $f(x) = \dfrac{4x-3}{3x-8}$

$$y = \frac{4x-3}{3x-8} \;\Rightarrow\; y(3x-8) = 4x-3 \;\Rightarrow\; 3xy - 8y = 4x - 3 \;\Rightarrow\; 3xy - 4x = 8y - 3 \;\Rightarrow$$

$$x(3y-4) = 8y-3 \;\Rightarrow\; x = \frac{8y-3}{3y-4}.$$

Intercambiando x con y: $y = \dfrac{8x-3}{3x-4}$. Por tanto, $\boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{8x-3}{3x-4}}$

3) Dadas $f(x) = -3x^2-2x$ y $g(x) = \dfrac{-5x+4}{3x-1}$, hallar (simplificando el resultado):

a) $g\circ f$

$$g\circ f(x) = g[f(x)] = g[-3x^2-2x] = \frac{-5(-3x^2-2x)+4}{3(-3x^2-2x)-1} = \boxed{\frac{15x^2+10x+4}{-9x^2-6x-1}}$$

b) g^{-1}, si existe.

$$y = \frac{-5x+4}{3x-1} \;\Rightarrow\; \text{Despejamos } x\text{:}\quad y(3x-1) = -5x+4 \;\Rightarrow\; 3xy - y = -5x+4 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 3xy + 5x = y + 4 \;\Rightarrow\; x(3y+5) = y+4 \;\Rightarrow\; x = \frac{y+4}{3y+5}$$

Esta última fórmula permite conocer quién es el original que se transforma en una imagen y conocida. La convertimos en función, usando las letras convencionales para las variables independiente y dependiente; es decir, intercambiamos x con y:

$$\boxed{y = \frac{x+4}{3x+5}}$$

4) Dadas las funciones $f(x) = 2x - 5$ y $g(x) = \dfrac{3x^2-2}{2x+}$, hallar $g\circ f$. *(1 punto)*

$$g\circ f(x) = g[f(x)] = g(2x-5) =$$

Llamando $z = 2x - 5$:

$$= g(z) = \frac{3z^2-2}{2z+7} =$$

Deshaciendo el cambio de variable anterior:

$$= \frac{3(2x-5)^2-2}{2(2x-5)+7} = \frac{3(4x^2-20x+25)-2}{4x-10+7} = \frac{12x^2-60x+75-2}{4x-3} = \boxed{\frac{12x^2-60x+73}{4x-3}}$$

5) Hallar la función inversa de $f(x) = \dfrac{6-\ x}{2x-3}$ *(1 punto)*

En la función inversa, si conocemos la imagen y de cierto x mediante f, tenemos que obtener, como resultado, el valor de ese x:

$$y = \frac{6-3x}{2x-3} \;\Rightarrow\; y(2x-3) = 6-3x \;\Rightarrow\; 2xy - 3y = 6-3x \;\Rightarrow\; 2xy + 3x = 6+3y \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x(2y+3) = 6+3y \;\Rightarrow\; x = \frac{6+3y}{2y+3}$$

Pero los resultados de una función siempre se recogen en la variable y, siendo x quien recibe el valor de partida. Así que los intercambiamos:

$$\boxed{y = \frac{6+3x}{2x+3}}$$