DEPARTAMENTO DE FUNDAMENTOS DE ECONOMÍA E HISTORIA ECONÓMICA

Análisis Matemático I EXAMEN FINAL

APELLIDOS: ________________________________ NOMBRE: ________________ D.N.I.____________

CUESTIONARIO DE RESPUESTA MÚLTIPLE (50%)

(Cada respuesta incorrecta resta 0,2 puntos)

- De un polinomio $p(x)$ se sabe que su término independiente es -5 y que toma el valor 7 para $x = 3$. Entonces, se puede asegurar que $p(x)$:

a) Tiene un máximo en un punto del intervalo [0, 3].
b) Toma el valor 2 en algún punto del intervalo [0, 3].
c) Es creciente en todo el intervalo [0, 3].

- Los infinitésimos en $x = 0$, $f(x) = px\sin x$ y $g(x) = 1-\cos x$ son:

a) Equivalentes si $p = 2$.
b) Del mismo orden para todo $p \neq 0$.
c) Ninguna de las anteriores.

- El polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x) = \sin(x-2)$ en el punto $x = 2$, es:

a) $P(x) = -\frac{1}{6}\left(x^3 - 6x^2 + 6x + 4\right)$

b) $P(x) = x - \frac{1}{6}x^3$

c) Ninguna de las anteriores.

- La función $f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x<0 \\ 5\sin x - 2\cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua y derivable:

a) Si $a = 5$ y cualquier valor de b.
b) Si $b = -2$ y cualquier valor de a.
c) Si $a =$ ____ y $b =$ ____.

- La función $f(x) = \sqrt{4+x^2}$ tiene:

a) Una asíntota horizontal y otra oblicua.
b) Al menos una asíntota oblicua, la recta $y = x$.
c) No tiene asíntotas.

- La función $f(x) = \ln\left(x^2 + 4x - 5\right)$ cumple:

a) Está definida para todo número real $x > -5$.
b) Es creciente para todo número real $x > -2$.
c) Decrece si $x \in (-\infty, -5)$, y crece si $x \in (1, +\infty)$.

- La función $f(x) = \dfrac{3x^2 + px - 1}{x^2 + x}$ tiene:

a) Tiene dos asíntotas verticales, cualquiera que sea el valor de p.
b) Tiene una discontinuidad evitable si $p = 2$.
c) Ninguna de las anteriores.

- La integral $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$:

a) Converge a e^2 b) Converge a e^{-1}
c) Es divergente

- La ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^3 + 3x^2$ en su punto de inflexión es:

a) $y = 3x + 4$. b) $y = -3x - 1$.
b) Ninguna de las anteriores

- La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{m}{1+x^2}$ tiene:

a) Un mínimo relativo si $m > 0$.
b) Dos puntos de inflexión si $m \neq 0$.
c) Ninguna de las anteriores.

PROBLEMAS (50%)

1. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

b) (0,5 puntos) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.

c) (0,5 puntos) Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.

d) (1 punto) Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $y = x + 2$, $x = 1$.

2. (1,5 puntos) Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int x(1-\ln x)\,dx$ b) $\int \dfrac{x+8}{x^2+x-2}\,dx$

3. (1 punto) Representa, justificando la respuesta, la gráfica de una función $f(x)$ que cumpla las siguientes propiedades:

a) Tiene dos asíntotas verticales, $x = -1$ y $x = 3$.
b) Para $x \to \pm\infty$, se cumple $f(x) \to 2$.
c) $f(-3) = f(0) = f(2) = f(5) = 0$.
d) Es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$ y es creciente en $(1, 3) \cup (3, +\infty)$.
e) $f(1) = -1$.

1. De un polinomio $p(x)$ se sabe que su término independiente es -5 y que toma el valor 7 para $x = 3$. Entonces, se puede asegurar que $p(x)$:
a) Toma el valor 2 en algún punto del intervalo [0, 3].
b) Tiene un máximo en algún punto del intervalo [0, 3].
c) Es creciente en todo el intervalo [0, 3].

Solución:
a) El teorema de Bolzano da respuesta a este ejercicio. Tal teorema dice: Si una función es continua en un intervalo $[a, b]$ y toma valores de signo opuesto en los extremos (por ejemplo, $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$), entonces existe al menos un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.
Como los polinomios son funciones continuas se les puede aplicar dicho teorema.
Por otra parte, si el término independiente de un polinomio $p(x)$ es -5 significa que $p(0) = -5$. Como, además, $p(x)$ para $x = 3$ es 7, esto es $p(3) = 7$, se puede asegurar que $p(x)$ toma el valor 2 en algún punto del intervalo [0, 3]. Para demostrarlo basta con considerar la función $f(x) = p(x) - 2$, pues cumple que:

$$f(0) = p(0) - 2 = -5 - 2 = -7 < 0\,;\ f(3) = p(3) - 2 = 7 - 2 = 5 > 0$$

En consecuencia, como $f(x) = p(x) - 2$ es continua, se puede asegurar que existe al menos un punto $c \in [0, 3]$ tal que $f(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = p(c) - 2 = 0 \Leftrightarrow p(c) = 2$.

2. La función $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ 5\sin x - 2\cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua y derivable:
a) Si $b = -2$ y cualquier valor de a.
b) Si $a = 5$ y cualquier valor de b.
c) Si $a =$ ____ y $b =$ ____.

Solución:
Por separado, para cada intervalo de definición, las funciones dadas son continuas y derivables. El único punto conflictivo es $x = 0$, en donde las funciones se juntan.
En ese punto la función está definida, siendo $f(0) = -2$; para que sea continua, además, debe tener límite en $x = 0$ y coincidir con su valor de definición.

Veamos:

Si $x \to 0^-$, $f(x) = ax + b \to b$

Si $x \to 0^+$, $f(x) = 5\sin x - 2\cos x \to -2$.

Ambos límites coinciden cuando $b = -2$.

Luego, la función $f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x < 0 \\ 5\sin x - 2\cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua en todo **R**.

Salvo en $x = 0$, su derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 0 \\ 5\cos x + 2\sin x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La función será derivable en $x = 0$ si coinciden las derivadas laterales.

Si $x \to 0^-$, $f'(x) = a \to a$

Si $x \to 0^+$, $f'(x) = 5\cos x + 2\sin x \to 5$.

Las derivadas son iguales cuando $a = 5$.

En consecuencia, la función $f(x) = \begin{cases} 5x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 5\sin x - 2\cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua y derivable en $x = 0$.

3. La función $f(x)=\sqrt{4+x^2}$ tiene:
a) Una asíntota horizontal y otra oblicua.
b) No tiene asíntotas.
c) Al menos una asíntota oblicua, la recta $y=x$.

Solución:
Para que sea una función debe suponerse que se elije el signo positivo de la raíz cuadrada.
El dominio de definición es todo **R**, pues $4+x^2\geq 0$ para todo $x\in$ **R**.

No tiene asíntotas horizontales, pues $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\sqrt{4+x^2}=+\infty$.

La recta $y=mx+n$ es asíntota oblicua de la curva $f(x)$ cuando se cumple que :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m,\ m\neq 0 \text{ y } \infty$$
$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right),\ n\neq\infty$$

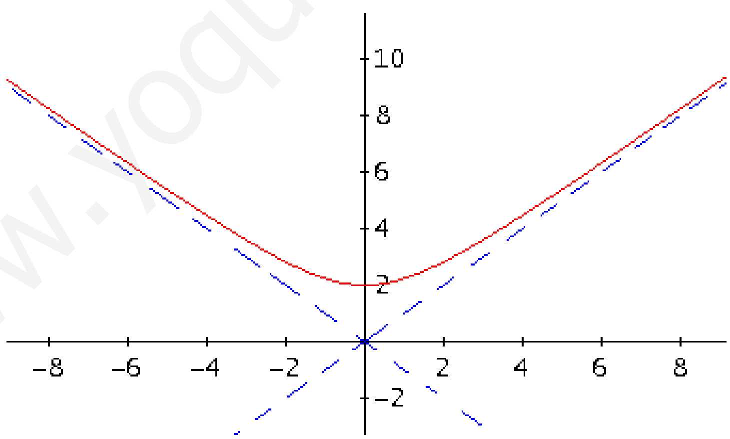
En este caso $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{4+x^2}{x^2}}=\pm 1$

Para $m=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4+x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{4+x^2}-x\right)\left(\sqrt{4+x^2}+x\right)}{\sqrt{4+x^2}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{\sqrt{4+x^2}+x}=0$.

La asíntota oblicua es $y=x$. (Por la simetría (la función es par), $y=-x$ es otra asíntota oblicua.)

La gráfica de la función es:



4. La función $f(x)=\ln\left(x^2+4x-5\right)$ cumple:
a) Está definida para todo número real $x>-5$.
b) Es creciente para todo número real $x>-2$.
c) Decrece si $x\in(-\infty,-5)$, y crece si $x\in(1,+\infty)$.

Solución:
La función logarítmica está definida para valores positivos; luego, en este caso, estará definida cuando:

$$x^2+4x-5>0 \Rightarrow (x-1)\cdot(x+5)>0 \Rightarrow x\in(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$$

Tiene dos asíntotas verticales: una a la izquierda de −5 (hacia −∞) y otra a la derecha de +1 (también hacia −∞).
La comprobación es evidente, ya que

$$\lim_{x\to -5^-}\left(\ln\left(x^2+4x-5\right)\right)=-\infty \text{ y } \lim_{x\to 1^+}\left(\ln\left(x^2+4x-5\right)\right)=-\infty$$

Derivando: $f'(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+4x-5}=\dfrac{2(x+2)}{(x-1)(x+5)}$

En el intervalo (−∞, −5) el signo de la derivada es negativo; mientras que en el intervalo (1, +∞) toma valores positivos. En consecuencia:

- si $x\in$ (−∞, −5), la función decrece.
- si $x\in$ (1, +∞), la función crece.

5. La función $f(x)=\dfrac{3x^2+px-1}{x^2+x}$ tiene:

a) Tiene dos asíntotas verticales, cualquiera que sea el valor de *p*.
b) **Tiene una discontinuidad evitable si *p* = 2.**
c) Ninguna de las anteriores.

Sol.

Si $p=2$, $f(x)=\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+x}=\dfrac{3(x+1)(x-1/3)}{x(x+1)}$ → Discontinua en $x=0$ y $x=-1$.

Como $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3(x+1)(x-1/3)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3(x-1/3)}{x}=4$, la discontinuidad en $x=-1$ puede evitarse definiendo $f(-1)=4$

6. La integral $\int_1^{\infty} e^{-x}dx$:

a) Converge a e^2
b) **Converge a** e^{-1}
c) Es divergente

Solución:

$$\int_1^{\infty} e^{-x}dx = \underset{t\to\infty}{lím}\int_1^{t} e^{-x}dx=\underset{t\to\infty}{lím}\left(-e^{-x}\right)\Big|_1^t=\underset{t\to\infty}{lím}\left(-e^{-t}-(-e^{-1})\right)=e^{-1}$$

7. La ecuación de la recta tangente a $f(x)=x^3+3x^2$ en su punto de inflexión es:

a) $y=3x+4$
b) $y=-3x-1$
c) Ninguna de las anteriores

Sol.

$f(x)=x^3+3x^2 \Rightarrow f'(x)=3x^2+6x \Rightarrow f''(x)=6x+6=0 \Rightarrow x=-1$ es PI.
La tangente es: $y-f(-1)=f'(-1)(x-1) \Rightarrow y-2=-3(x+1) \Rightarrow y=-3x-1$

8. La gráfica de la función $f(x)=\dfrac{m}{1+x^2}$ tiene:

a) Un mínimo relativo si $m>0$.
b) Dos puntos de inflexión si $m\neq 0$.
c) Ninguna de las anteriores.

Sol. $f(x)=\dfrac{m}{1+x^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2mx}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(x)=\dfrac{2m(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$

La derivada primera se anula si $x=0$, independientemente del valor de m.

- Si $m>0, f''(0)<0 \rightarrow$ se tendría un máximo.
- Si $m<0, f''(0)>0 \rightarrow$ se tendría un mínimo.
- Si $m\neq 0$, la derivada segunda se anula en $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y en $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Por tanto, hay dos puntos de inflexión.

9. Los infinitésimos en $x=0$, $f(x)=px\sin x$ y $g(x)=1-\cos x$ son:

a) Equivalentes si $p=2$.
b) Del mismo orden para todo $p\neq 0$.
c) Ninguna de las anteriores.

Sol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{px\sin x}{1-\cos x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$ (L´Hôpital) $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p\sin x+px\cos x}{\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$ (L´Hôpital) $=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p\cos x+p\cos x-px\sin x}{\cos x}=2p$.

Para todo $p\neq 0$ serían del mismo orden.

Si $p=\dfrac{1}{2}$ serían equivalentes.

10. El polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x)=\sin(x-2)$ en el punto $x=2$, es:

a) $P(x)=-\dfrac{1}{6}\left(x^3-6x^2+6x+4\right)$

b) $P(x)=x-\dfrac{1}{6}x^3$

c) Ninguna de las anteriores.

Sol.

$f(x)=\sin(x-2) \rightarrow f(2)=0$; $f'(x)=\cos(x-2) \rightarrow f'(2)=1$;

$f''(x)=-\sin(x-2) \rightarrow f''(2)=0$; $f'''(x)=-\cos(x-2) \rightarrow f'''(2)=-1$.

Luego: $P(x)=(x-2)-\dfrac{1}{6}(x-2)^2 \Rightarrow P(x)=-\dfrac{1}{6}\left(x^3-6x^2+6x+4\right)$

PROBLEMAS

1. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

b) (0,5 puntos) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.

c) (0,5 puntos) Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.

d) (1 punto) Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $y=x+2$, $x=1$.

Solución:

a) Derivando, $f'(x)=\dfrac{2x\cdot(x^2+1)-(x^2+2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

La derivada se anula en $x = 0$; toma valores positivos cuando $x < 0$; y negativos si $x > 0$. En consecuencia:

- Si $x < 0$, la función es creciente.
- Si $x > 0$, la función es decreciente.
- Si $x = 0$, la función toma el valor máximo.

b) La derivada segunda es, $f''(x)=\dfrac{-2\cdot(x^2+1)^2+2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\dfrac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$.

$f''(x)=0 \Rightarrow 6x^2-2=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ o $x=+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Como la derivada segunda toma signos distintos a izquierda y derecha de esos puntos, en ellos se dan inflexiones. (También podría calcularse la derivada tercera y comprobar que en $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ o $x=+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ toma valores distintos de 0.)

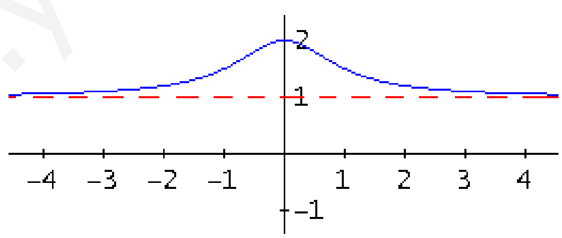
c) La curva no tiene asíntotas verticales pues siempre está definida: Dom(f) = **R**.

Tiene una asíntota horizontal pues: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{x^2+1}=1$. La asíntota es la recta $y=1$.

Con los datos anteriores y dando algunos valores puede trazarse su gráfica.

Valores: (0, 2); (±1, 3/2); $\left(\pm 1/\sqrt{3}, 7/4\right)$; (±2, 6/5).

La grafica será:



d) El área pedida es la de la región sombreada en la figura adjunta.

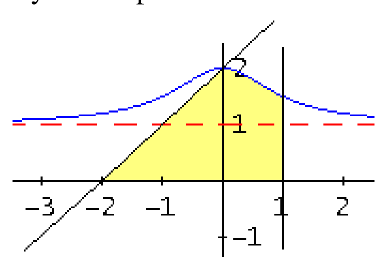
La región puede descomponerse en dos trozos: un triángulo y un “trapecio” curvilíneo.

El área del triángulo vale 2.

La del “trapecio” viene dado por:

$$\int_0^1\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1\left(\frac{x^2+1+1}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \left(x+\arctan x\right)\Big|_0^1 = 1+\frac{\pi}{4}.$$



Por tanto, el área total valdrá $3+\dfrac{\pi}{4}$.

2. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int x(1-\ln x)dx$ (0,75 puntos) b) $\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx$ (0,75 puntos)

Solución:

a) En primer lugar, puede escribirse $\int x(1-\ln x)dx = \int xdx - \int x\ln xdx$.

La segunda integral se hace por partes:

$u = x\ln x \Rightarrow du = (\ln x + 1)dx$

$dv = dx \Rightarrow v = \mathrm{x}$

Luego, $\int x\ln xdx = x^2\ln x - \int (x\ln x + x)dx = x^2\ln x - \int x\ln xdx - \int xdx \Rightarrow 2\int x\ln xdx = x^2\ln x - \frac{x^2}{2}$

De donde, $\int x\ln xdx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4}$

Por tanto:

$$\int x(1-\ln x)dx = \int xdx - \int x\ln xdx = \frac{x^2}{2} - \left(\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4}\right) + c = -\frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{3x^2}{4} + c.$$

b) Esta integral puede hacerse por el método de descomposición en fracciones simples.
Como las raíces del denominador son $x = 1$ y $x = -2$: $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, puede escribirse la igualdad:

$$\frac{x+8}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

Luego:

$x + 8 = A(x+2) + B(x-1)$

si $x = 1$: $9 = 3A \Rightarrow \mathrm{A} = 3$

si $x = -2$: $6 = -3\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{B} = -2$

Con esto:

$$\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx = \int \frac{3}{x-1}dx + \int \frac{-2}{x+2}dx = 3L(x-1) - 2L(x+2) + c$$

3. (1 punto) Representa, justificando la respuesta, la gráfica de una función $f(x)$ que cumpla las siguientes propiedades:

a) Tiene dos asíntotas verticales, $x = -1$ y $x = 3$.

b) Para $x \to \pm\infty$, se cumple $f(x) \to 2$.

c) $f(-3) = f(0) = f(2) = f(5) = 0$.

d) Es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$ y es creciente en $(1, 3) \cup (3, +\infty)$.

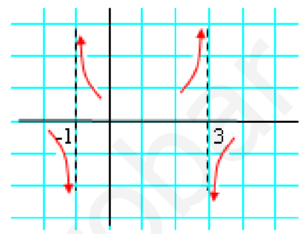
e) $f(1) = -1$.

Solución:

Por a) la función no está definida en esos dos puntos, $x = -1$ y $x = 3$, y, además, por su izquierda o derecha la función se va hacia $\pm\infty$.

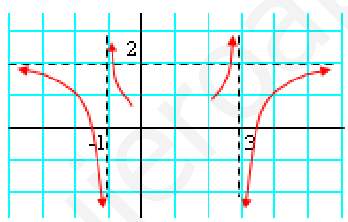
Como es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \Rightarrow$ a la izquierda de -1 se va hacia $-\infty$; pero a su derecha "baja" (decrece) desde $+\infty$: tiende hacia $+\infty$.

Como es creciente en $(1, 3) \cup (3, +\infty) \Rightarrow$ a la izquierda de 3 se va hacia $+\infty$; mientras que su derecha "sube" (crece) desde $-\infty$: tiende hacia $-\infty$.



En esquema, la situación es la adjunta.

Por b) $\Rightarrow$ la función tiene una asíntota horizontal: la recta $y = 2$. Esto lleva a matizar el esquema anterior, debiéndose trazar como sigue:



Por c) y e) $\Rightarrow$ pasa por los puntos: $(-3, 0)$; $(0, 0)$; $(2, 0)$; $(5, 0)$ y $(1, -1)$. El punto $(1, -1)$ es un mínimo relativo de la función, pues ésta decrece a su izquierda y crece a su derecha.

Dibujando dichos puntos y ajustando las tendencias, se obtiene la siguiente gráfica.