DEPARTAMENTO DE FUNDAMENTOS DE ECONOMÍA E HISTORIA ECONÓMICA Análisis Matemático I EXAMEN FINAL

APELLIDOS: ____

NOMBRE: ______________________ D.N.I.________________

CUESTIONARIO DE RESPUESTA MÚLTIPLE (50%)
(Cada respuesta incorrecta resta 0,2 puntos)

- El área encerrada entre las gráficas de la recta $y = x + 2$ y la parábola $y = x^2$, vale:

a) 9/2
b) 13/3.
c) Ninguna de las anteriores, esa área vale: ____

- La función $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$ tiene:

a) Una asíntota oblicua, la recta $y = x$, y un máximo.
b) Una asíntota horizontal, la recta $y = 1$, y un mínimo en $x = 1/2$.
c) Ninguna de las anteriores.

- Utilizando el teorema de Bolzano puede asegurarse que la función $f(x) = x^3 - ax^2 + x + 1$ corta dos veces al eje OX, en el intervalo $[-1, 1]$:

a) Siempre que $a < -3$.
b) Siempre que $a > 3$.
c) Siempre que $-3 < a < 3$.

- La función $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & si \quad x \le 1 \\ ax + b & si \quad x > 1 \end{cases}$ es derivable en el punto $x = 1$:

a) Solamente cuando $a = 1$ y $b = -1$.
b) No puede ser derivable, pues nunca es continua.
c) Ninguna de las anteriores. Los valores de a y b deben ser: ___________

- La función $f(x) = x^3 + ax^2 + 5$:

a) Es creciente para todo x si $a > 0$.
b) Tiene un mínimo en $x = -2a/3$ si $a < 0$.
c) Tiene un máximo en $x = 0$ si $a = 0$.

- La discontinuidad en $x = 0$, de la función $f(x) = \dfrac{4x + \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$ puede evitarse, definiendo:

a) $f(0) = 2$.
b) $f(0) = -1$.
c) Ninguna de las anteriores.

- La función $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$ verifica:

a) Es siempre decreciente.
b) Tiene un máximo y un mínimo.
c) Ninguna de las anteriores.

- La integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(4-x)^2}$ es:

a) Es divergente.
b) Converge a 4.
c) Ninguna de las anteriores, converge a ___

- El valor que verifica el teorema del valor medio para $f(x) = x^2 - 3x$, en el intervalo $(p, 2p)$, $p > 0$, es:

a) $\dfrac{3p}{2}$
b) $2p - 3$
c) Ninguna de las anteriores

- La ecuación de la recta tangente la curva $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ en el punto de abscisa $x = 3$ es:

a) $y - 3 = -5(x - 3)$
b) $5x - 32y - 27 = 0$.
c) Ninguna de las anteriores, su ecuación es:
____

PROBLEMAS:

1. a) (1 punto) Obtén razonadamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos de la función $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5$. Haz un esbozo de su gráfica.

b) (1 punto) Determina las asíntotas de $f(x) = x + e^{-x}$.

2. Halla el polinomio de Taylor de grado 4 de la función $f(x) = x\ln(x+1)$, en el punto $x = 0$. (1 punto)

3. Calcula las siguientes integrales:

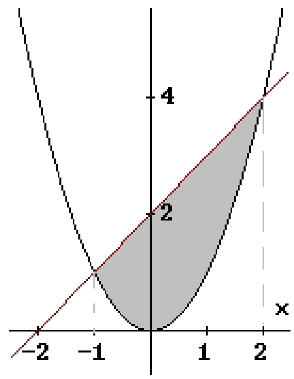
a) $\int \frac{2dx}{x^2 - 4}$ (0,7 puntos) b) $\int x^2 \text{sen}\,(2x)dx$ (0,7 puntos)

c) $\int \frac{3}{1-x}dx$ (0,3 puntos) d) $\int \left(3x^4 - e^{6x}\right)dx$ (0,3 puntos)

Soluciones:

1. El área encerrada entre las gráficas de la recta $y = x + 2$ y la parábola $y = x^2$, vale:
a) 9/2
b) 13/3.
c) Ninguna de las anteriores, esa área vale:

Solución:
El área encerrada entre ambas curvas es la sombreada en la siguiente figura.



La parábola y la recta se cortan en los puntos las soluciones del sistema $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$, que son (−1, 1) y (2, 4); puntos de abscisas x = −1 y x = 2.

Por tanto, el área pedida viene dada por la integral

$$A = \int_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

2. La función $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$ tiene:
a) Una asíntota oblicua, la recta $y = x$, y un máximo.
b) Una asíntota horizontal, la recta $y = 1$, y un mínimo en $x = 1/2$.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:
Como

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \text{ (aplicando L´Hôpital)}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8x-8}{8x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L´H) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8}{8} = 1$$

la función tiene por asíntota horizontal la recta $y = 1$.

Máximo y mínimo.
Hacemos la derivada y la igualamos a 0:

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} = \frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f´(x) = \frac{16x^2-4}{(4x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 16x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

Como:

para $x < -1/2$, $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece

para $-1/2 < x < 1/2$, $f´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece $\Rightarrow$ En $x = -1/2$ hay un máximo

para $x > 1/2$, $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece $\Rightarrow$ En $x = 1/2$ hay un mínimo

Los valores máximos y mínimos son, respectivamente, $f(-1/2) = 2$ y $f(1/2) = 0$.

NOTA. Como la función nunca toma valores negativos, el mínimo lo toma cuando vale 0, que se da cuando $x = 1/2$. (En este caso no hace falta derivar.)

3. Utilizando el teorema de Bolzano puede asegurarse que la función $f(x) = x^3 - ax^2 + x + 1$ corta dos veces al eje OX, en el intervalo $[-1, 1]$:

a) Siempre que $a < -3$.

b) Siempre que $a > 3$.

c) Siempre que $-3 < a < 3$.

Solución:

La función es continua en todo **R**. Por tanto cumple el teorema de Bolzano.

$f(x) = x^3 - ax^2 + x + 1 \Rightarrow f(-1) = -3 - a$, $f(0) = 1$, $f(1) = 3 - a$.

- Si $a > 3 \Rightarrow f(-1) < 0$, $f(0) > 0$, $f(1) < 0$. Seguro que corta dos veces.
- Si $a < -3 \Rightarrow f(-1) > 0$, $f(0) > 0$, $f(1) > 0$.
- Si $-3 < a < 3 \Rightarrow f(-1) < 0$, $f(0) > 0$, $f(1) > 0$.

4. La función $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & si \quad x \le 1 \\ ax + b & si \quad x > 1 \end{cases}$ es derivable en el punto $x = 1$:

a) Solamente cuando $a = 1$ y $b = -1$.

b) No puede ser derivable, pues nunca es continua.

c) Ninguna de las anteriores. Los valores de a y b deben ser:

Solución:

a) El único punto que presenta dificultades es $x = 1$. En los demás puntos la función definida es derivable, pues se trata de dos funciones polinómicas.

En primer lugar estudiamos la continuidad.

Si $x \to 1^-$, $f(x) = x^3 - x^2 \to 0$

Si $x \to 1^+$, $f(x) = ax + b \to a + b$.

Debe cumplirse que $a + b = 0$

Salvo en $x = 1$, la función derivada es:

$$f´(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & si \quad x < 1 \\ a & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x = 1$ deben ser iguales las derivadas laterales.

Si $x \to 1^-$, $f´(x) = 3x^2 - 2x \to 1$

Si $x \to 1^+$, $f´(x) = a \to a$.

Debe cumplirse que $a = 1$

Por tanto, como $a + b = 0 \Rightarrow b = -1$.

5. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + 5$:

a) Es creciente para todo x si $a > 0$.

b) Tiene un mínimo en $x = -2a/3$ si $a < 0$.

c) Tiene un máximo en $x = 0$ si $a = 0$.

Solución:

Para que $f(x) = x^3 + ax^2 + 5$ sea creciente en todo su dominio es preciso que $f\,'(x) \geq 0$, para todo x.

Como $f\,'(x) = 3x^2 + 2ax$, resulta evidente que si $a = 0$, $f\,'(x) = 3x^2 \geq 0$. En este caso la función sería creciente en todo su dominio.

En los demás casos, $a \neq 0$, $f\,'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = -2a/3$.

Como $f\,''(x) = 6x + 2a$,

para $x = 0$, $f\,''(0) = 2a \neq 0 \Rightarrow$ en $x = 0$ hay máximo si $a < 0$, y mínimo si $a > 0$.

para $x = -2a/3$, $f\,''(-2a/3) = -2a \neq 0 \Rightarrow$ en $x = -2a/3$ hay mínimo si $a < 0$, y máximo si $a > 0$.

Al haber siempre un máximo y un mínimo, la función no puede ser siempre creciente. Por tanto, el único valor de a que hace creciente a la función es 0.

6. La discontinuidad en $x = 0$, de la función $f(x) = \dfrac{4x + \text{sen}\, 2x}{\text{sen}\, 3x}$ puede evitarse, definiendo:

a) $f(0) = 2$.

b) $f(0) = -1$.

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Es evidente que la función no es continua en $x = 0$: no está definida en ese punto.

La discontinuidad puede evitarse definiendo $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x + sen2x}{sen3x}$, en el supuesto de que el límite exista.

Veamos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x + sen2x}{sen3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x \to 0} \frac{4 + 2\cos 2x}{3\cos 3x} = \frac{6}{3} = 2$$

Por tanto, $f(0) = 2$.

7. La función $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$ verifica:

a) Es siempre decreciente.

b) Tiene un máximo y un mínimo.

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

La derivada es:

$$f(x) = \frac{2(x+1)e^x - (x+1)^2 e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1 - x^2)}{e^{2x}}$$

La derivada se anula en $x = \pm 1$.

- Si $x < -1$, $f\,'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $-1 < x < 1$, $f\,'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece. Por tanto en $x = -1$ hay un mínimo relativo.
- Si $x > 1$, $f\,'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece. Por tanto, en $x = 1$ hay un máximo relativo.

8. La integral $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(4-x)^2}$ es:

a) Es divergente.
b) Converge a 4.
c) Ninguna de las anteriores, converge a ___

Solución:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{0} \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{b\to-\infty} \left. \frac{1}{4-x} \right|_{b}^{0} = \lim_{b\to-\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4-b} \right) = \frac{1}{4}$$

9. El valor que verifica el teorema del valor medio para $f(x) = x^2 - 3x$, en el intervalo $(p, 2p)$, $p > 0$, es:

a) $\frac{3p}{2}$ b) $2p-3$ c) Ninguna de las anteriores

Solución:
Como la función es continua y derivable en todo **R**, se cumple que

$$\frac{f(2p)-f(p)}{2p-p} = f'(c) \Rightarrow \frac{4p^2-6p-\left(p^2-3p\right)}{p} = 2x-3 \Rightarrow 3p-3 = 2x-3 \Rightarrow x = \frac{3p}{2}$$

10. La ecuación de la recta tangente la curva $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ en el punto de abscisa $x = 3$ es:

a) $y-3 = -5(x-3)$
b) $5x-32y-27 = 0$.
c) Ninguna de las anteriores, su ecuación es: _______________

Solución:
La ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = 3$ es

$$y - f(3) = f'(3)(x-3)$$

$$f'(x) = \frac{1-x^2-x\cdot(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2} \Rightarrow f'(3) = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$$

$$f(3) = -\frac{3}{8}$$

La tangente será: $y + \frac{3}{8} = \frac{5}{32}(x-3) \Leftrightarrow 5x - 32y - 27 = 0$

PROBLEMAS

1. a) (1 punto) Obtén razonadamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos de la función $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5$. Haz un esbozo de su gráfica.

b) (1 punto) Determina las asíntotas de $f(x) = x + e^{-x}$.

Solución:

a) Se hacen las derivadas primera y segunda:

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 3x - 6 \Rightarrow f''(x) = 6x + 3$$

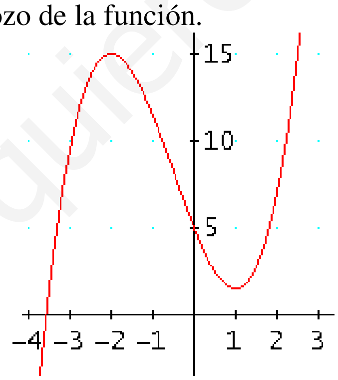
Los puntos singulares se dan en las soluciones de $f'(x) = 0$:

$$3x^2 + 3x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

- Si $x < -2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $-2 < x < 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Si $x > 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

- Como $f''(-2) = -9 < 0 \Rightarrow$ en $x = -2$ la función tiene un máximo relativo.
- Como $f''(1) = 9 > 0 \Rightarrow$ en $x = 1$ la función tiene un mínimo relativo.

Nota: Aunque no se pide damos un esbozo de la función.



b) La función $f(x) = x + e^{-x}$ no tiene asíntotas verticales, pues está definida en todo **R**.
Tampoco tiene asíntotas horizontales, pues $\lim_{x\to+\infty}\left(x + e^{-x}\right) = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty}\left(x + e^{-x}\right) = +\infty$

La recta $y = mx + n$ es asíntota oblicua de la curva $f(x)$ cuando se cumple que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = m,\ m \neq 0 \text{ y } \infty; \qquad n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right),\ n \neq \infty$$

- $m = \lim_{x\to\infty}\frac{x + e^{-x}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L'H) = \lim_{x\to\infty}\frac{1 - e^{-x}}{1} = 1$
- $n = \lim_{x\to\infty}\left(x + e^{-x} - x\right) = 0$.

Por tanto, la recta $y = x$ es asíntota oblicua de *f*.

2. Halla el polinomio de Taylor de grado 4 de la función $f(x) = x\ln(x+1)$, en el punto x = 0. (1 punto)

Sol.

$f(x) = x\ln(x+1) \;\Rightarrow\; f(0) = 0$ $\qquad f'(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1} \;\Rightarrow\; f'(0) = 0$

$f''(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2} \;\Rightarrow\; f''(0) = 2$ $\qquad f'''(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} - \dfrac{2}{(x+1)^3} \;\Rightarrow\; f'''(0) = -3$

$f^{4)}(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} + \dfrac{6}{(x+1)^6} \;\Rightarrow\; f^{4)}(0) = 8$

$P(x) = \dfrac{2x^2}{2!} - \dfrac{3x^3}{3!} + \dfrac{8x^4}{4!} = x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{3}x^4$

3. Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{2dx}{x^2-4}$ (0,7 puntos) b) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen}(2x)dx$ (0,7 puntos)

c) $\displaystyle\int \frac{3}{1-x}dx$ (0,3 puntos) d) $\displaystyle\int \left(3x^4 - e^{6x}\right)dx$ (0,3 puntos)

Solución:

a) Como: $\dfrac{2}{x^2-4} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+2} = \dfrac{A(x+2)+B(x-2)}{x^2-4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 = A(x+2) + B(x-2) \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - 2B = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \text{ y } B = -\frac{1}{2}$$

Luego,

$$\int \frac{2dx}{x^2-4} = \int \left(\frac{1/2}{x-2} - \frac{1/2}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2}\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(x+2) + c$$

b) Esta integral puede hacerse por el método de integración por partes: $\int udv = uv - \int vdu$

Haciendo $x^2 = u$, $\sin 2x\, dx = dv$

se tiene $2xdx = du$, $v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x$

Luego, $\displaystyle\int x^2 \sin(2x)dx = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int x\cos 2x dx$

Para hacer la segunda integral aplicamos nuevamente el método de partes.

$\displaystyle\int x\cos 2x dx$:

tomamos: $x = u$, $\cos 2x\, dx = dv$,

se tiene $dx = du$, $v = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

Luego, $\displaystyle\int x\cos 2x dx = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$

Por tanto: $\displaystyle\int x^2\sin(2x)dx = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$

c) $\displaystyle\int \frac{3}{1-x}dx = -3\ln(1-x) + c$

d) $\displaystyle\int \left(3x^4 - e^{6x}\right)dx = \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{6}e^{6x} + c$