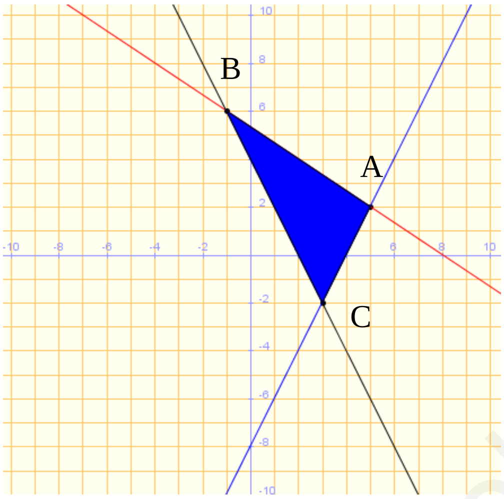
GEOMETRÍA

1. Dado el triángulo de vértices A(5,2) , B(-1,6) y C(3,-2) , hallar las ecuaciones de las rectas mediana y mediatriz correspondientes al lado AB.



Para calcular la mediana (recta que une el vértice opuesto al lado AB (vértice C) con el punto medio del lado AB)

1) Calculamos el punto medio del lado AB

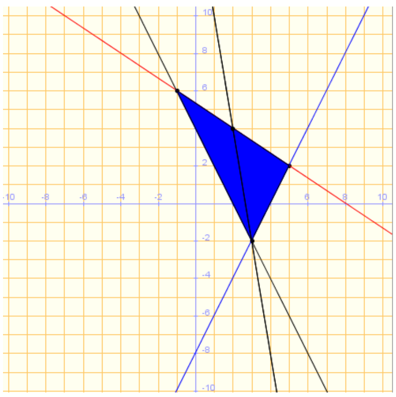
$$PM_{AB} = \left(\frac{5-1}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (2,4)$$

2) Calculamos la pendiente de la mediana, a partir de dos puntos

$$\left.\begin{array}{l} PM_{AB} = (2,4) \\ C = (3,-2) \end{array}\right\} \to m_{PM_{AB},C} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-(-2)}{2-3} = \frac{6}{-1} = -6$$

3) Calculamos la ecuación de la mediana que pasa por (3,-2) y tiene como pendiente m= - 6

$$y = -2 - 6\cdot(x-3)$$
$$y = -2 - 6x + 18$$
$$y = -6x + 16$$



Para calcular la mediatriz (recta perpendicular al lado AB (vértice C) que pasa por el punto medio del lado AB)

1) Calculamos el punto medio del lado AB

$$PM_{AB} = \left(\frac{5-1}{2}, \frac{2+6}{2} \right) = (2{,}4)$$

2) Calculamos la pendiente del lado AB

$$\left.\begin{array}{l} A = (5{,}2) \\ B = (-1{,}6) \end{array}\right\} \to m_{A,B} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-6}{5-(-1)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

3) Calculamos la pendiente de la mediatriz

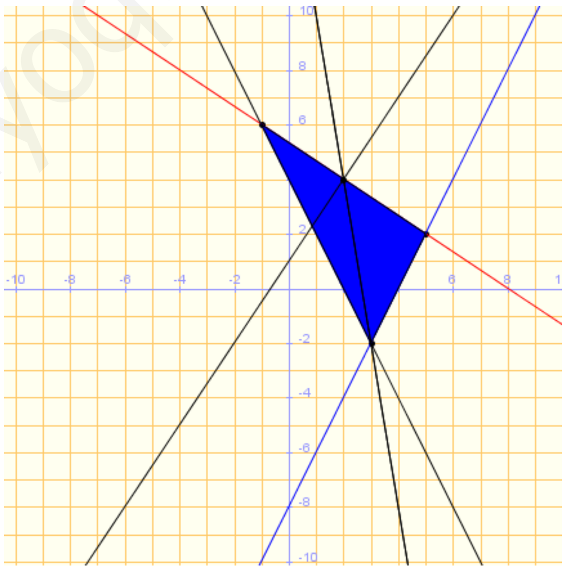
$$m_{mediatriz} = \frac{-1}{m_{A,B}} = \frac{-1}{\frac{-2}{3}} = \frac{3}{2}$$

4) Calculamos la ecuación de la mediatriz que pasa por (2,4) y tiene como pendiente m= 3/2

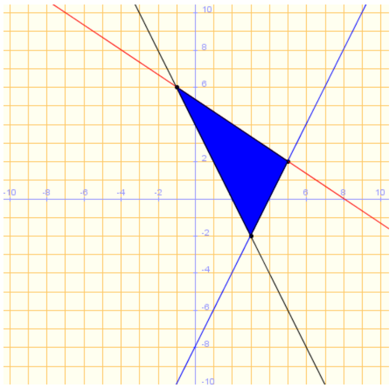
$$y = 4 + \frac{3}{2} \cdot (x-2)$$

$$y = 4 + \frac{3}{2} x - 3$$

$$y = \frac{3}{2} x + 1$$



2. Halla el área del triángulo de vértices A(5,2) , B(-1,6) y C(3,-2).



Con WIRIS

T=triangulo(punto(5,2),punto(−1,6),punto(3,−2)) → (5,2)−(−1,6)−(3,−2)
área(T) → 16

Área = 16

3. Una recta pasa por el punto P(-5,2) y forma un ángulo de 45º con la recta 5x-6y+1=0 . Halla la ecuación de dicha recta

Sea s: y = mx + n la recta pedida. Como la recta pasa por el punto (-5,2), entonces 2 = -5m + n. Utilizando la fórmula del Ángulo comprendido entre dos rectas tenemos que:

$$\tan(s,r) = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}$$

Dada la recta **5x-6y+1=0 → m_r =5/6**

$$\tan 45^\circ = \frac{m_s - 5/6}{1 + 5/6 \cdot m_s}$$

$$1 = \frac{m_s - 5/6}{1 + 5/6 \cdot m_s}$$

$$1 \cdot (1 + 5/6 \cdot m_s) = m_r - 5/6$$

$$1 + 5/6 \cdot m_s = m_s - 5/6$$

$$5/6 \cdot m_s - m_s = -5/6 - 1$$

$$-1/6 m_s = -11/6$$

$$m_s = 11$$

Entonces como 2 = -5m + n → 2 = -5*11 + n → 2 = -55 +n → n=57

Ecuación de la recta que pasa por punto P(-5,2) y forma un ángulo de 45º con la recta 5x-6y+1=0 es

$$y = 11x + 57$$

4. Dados los puntos $A(2, -1)$, $B(-3, 4)$ y $C(0, -8)$:

a) Halla el punto medio del segmento de extremos A y B.
b) Halla el simétrico de B con respecto a C.

Solución:

a) El punto medio es:

$$M = \left(\frac{2+(-3)}{2}, \ \frac{-1+4}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \ \frac{3}{2} \right)$$

b) Llamamos $B'(x, y)$ al simétrico de B con respecto a C. Si B' es simétrico de B respecto de C, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB'}$$

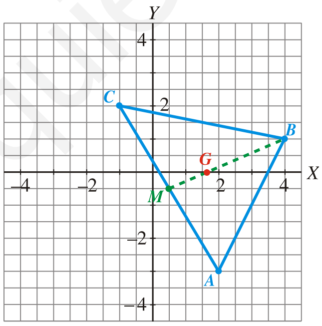
$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = (3, -12) \\ \overrightarrow{CB'} = (x-0, y+8) \end{array} \right\} \quad \text{Entonces} \ \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y+8 = -12 \end{array} \right\} \ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -20 \end{array}$$

Por tanto:

$$B'(3, -20)$$

5. Halla las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices $A(2, -3)$, $B(4, 1)$ y $C(-1, 2)$.

Solución:



Llamamos $G(x, y)$ al baricentro y $M(a, b)$ al punto medio del lado AC. Sabemos que:

$$2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{BG}$$

Hallamos M:

$$M = \left(\frac{2+(-1)}{2}, \frac{-3+2}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{GM} = \left(\frac{1}{2} - x, -\frac{1}{2} - y \right) \\ \overrightarrow{BG} = (x-4, y-1) \end{array} \right\} \ \begin{array}{l} 2\left(\frac{1}{2} - x, \ \frac{-1}{2} - y \right) = (x-4, \ y-1) \\ (1-2x, -1-2y) = (x-4, \ y-1) \end{array}$$

$$1-2x=x-4 \quad\rightarrow\quad 5=3x \quad\rightarrow\quad x=\frac{5}{3}$$
$$-1-2y=y-1 \quad\rightarrow\quad 0=3y \quad\rightarrow\quad y=0$$

El baricentro es:

$$G\left(\frac{5}{3},0\right)$$

6. Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto *P*(3, −1) y es paralela a la recta:

$$\mathbf{s:}\begin{cases}\boldsymbol{x=2-3t}\\ \boldsymbol{y=4+t}\end{cases}$$

Solución:

Vector posición: $\overrightarrow{OP}\,(3,-1)$
Vector dirección: $(-3,1)$
Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases}\;\;=3-\;\;t\\ y=-1+\end{cases}$$

7. Dadas las rectas:

$$\mathbf{r:}\begin{cases}\boldsymbol{x=1+t}\\ \boldsymbol{y=-2-2t}\end{cases} \qquad \mathbf{s:}\begin{cases}\boldsymbol{x=-1-3t}\\ \boldsymbol{y=2+6t}\end{cases}$$

averigua su posición relativa. Si se cortan, di cuál es el punto de corte:

Solución:

Cambiamos el parámetro en la recta *s*:

$$r:\begin{cases}x=1+t\\ y=-2-2t\end{cases} \qquad s:\begin{cases}x=-1-3k\\ y=2+6k\end{cases}$$

Igualamos:

$$\left.\begin{array}{l}1+\;\;=-1-3k\\ -2-2\;\;=2+6k\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}t=-2-\\ -2-2(-2-3k)=2+6k \quad\rightarrow\quad -2+4+6k=2+6k \quad\rightarrow\quad 0=0k\end{array}$$

Infinitas soluciones $\rightarrow$ Se trata de la misma recta; *r* y *s* coinciden.

8. Dadas las rectas *r* y *s*, determina el ángulo que forman:

$$\mathbf{r:}\begin{cases}\boldsymbol{x=-2+2t}\\ \boldsymbol{y=4+4t}\end{cases} \qquad \mathbf{s:}\begin{cases}\boldsymbol{x=-4+2t}\\ \boldsymbol{y=5-t}\end{cases}$$

Solución:

Vector dirección de $r \rightarrow (2,\ 4)$
Vector dirección de $s \rightarrow (2,\ -1)$

Llamamos α al ángulo que forman r y s:

$$\cos\alpha = \frac{\left|(2,\ 4)\cdot(2,\ -1)\right|}{\sqrt{4+16}\cdot\sqrt{4+1}} = \frac{|4-4|}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 90^\circ$$

Es decir, las rectas son perpendiculares.

9. Halla la ecuación implícita de la recta cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r:\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 1-3t \end{cases}$$

Solución:

Multiplicamos por 3 la primera ecuación y por 2 la segunda, y sumamos:

$$\left.\begin{array}{l} 3(x = -3+2t) \\ 2(y = 1-3t) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 3x = -9+6t \\ \underline{2y = 2-6t} \\ 3x+2y = -7 \end{array}$$

La ecuación implícita es $3x + 2y + 7 = 0$.

10. Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por $P(-1,\ 2)$ y es paralela a $3x - y + 4 = 0$.

Solución:

Obtenemos la pendiente de la recta dada:

$$3x - y + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad y = 3x+4 \quad \rightarrow \quad pendiente = 3$$

La recta paralela tiene la misma pendiente; su ecuación será:

$$y = 2+3(x+1) \quad \rightarrow \quad y = 2+3x+3 \quad \rightarrow \quad 3x - y + 5 = 0$$

11. Halla la distancia del punto $P(2,\ -1)$ a la recta:

$$r:\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 1+4t \end{cases}$$

Solución:

Expresamos r en forma implícita:

$$\left.\begin{array}{r} -2(x = -3+2\ ) \\ y = 1+ \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} -2 \quad = 6-4t \\ \underline{\quad y = 1+ \quad} \\ -2x+y = 7 \ \rightarrow \ 2x-y+7 = 0 \end{array}$$

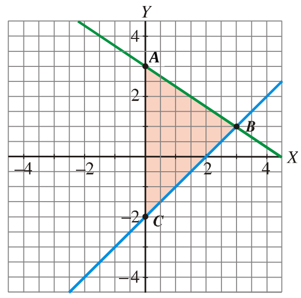
Hallamos la distancia de P a r:

$$dist\,(P,r)=\frac{|2\cdot 2-(-1)+7|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|4+1+7|}{\sqrt{5}}=\frac{12}{\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$$

12. Calcula los vértices y el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas:

$$\boldsymbol{r: x-y-2=0 \qquad s: 2x+3y-9=0 \qquad t: x=0}$$

Solución:



1.º) Los vértices del triángulo son los puntos de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x-y-2=0 \\ 2x+3y-9=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=y+2 \\ 2(y+2)+3y-9=0 \\ 2y+4+3y-9=0 \;\rightarrow\; 5y=5 \;\rightarrow\; y=1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x=3 \end{array}$$

Punto $B(3,\ 1)$

$$\left.\begin{array}{l} x-y-2=0 \\ x=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y=-2 \\ \end{array}\right\} \quad \text{Punto } C(0,-2)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y-9=0 \\ x=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y=3 \\ \end{array}\right\} \quad \text{Punto } A(0,3)$$

2.º) Tomamos el lado AC como base del triángulo:

$$base=\left|\overrightarrow{AC}\right|=5$$

3.º) La altura es la distancia de B a la recta que pasa por A y por C (que es el eje Y). Por tanto:

$$altura=3$$

4.º) El área del triángulo es:

$$Área=\frac{5\cdot 3}{2}=\frac{15}{2}=7{,}5\ \text{u}^2$$

13. **Prueba que si las rectas $ax+by+c=0$ y $a'x+b'y+c'=0$ son paralelas, se cumple que $ab'-a'b=0$.**

Solución:

Pendiente de la recta $ax+by+c=0 \;\rightarrow\; m=\frac{-a}{b}$

Pendiente de la recta $a'x+b'y+c'=0 \;\rightarrow\; m'=\frac{-a'}{b'}$

Por ser paralelas, las pendientes coinciden:

$m=m' \;\rightarrow\; ---=-\frac{a'}{b'} \;\rightarrow\; ab'=a'b \;\rightarrow\; ab'-a'b=0$

14. **La diagonal mayor de un rombo mide el doble que la diagonal menor y tiene por extremos los puntos $B(3,\,1)$ y $D(-5,\,-3)$. Halla los vértices A y C y el área del rombo.**

Solución:

$\overrightarrow{BD}=(-8,-4) \;\rightarrow\; \left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

Como esta diagonal mide el doble que la diagonal menor $\;\rightarrow\; \left|\overrightarrow{AC}\right|=\frac{4\sqrt{\ }}{2}=2\sqrt{5}$

Por tanto $\;\rightarrow\;$ Área del rombo $=\frac{\left|\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}{}=\frac{4\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{2}=20\text{ u}^2$

Los otros dos vértices están en la perpendicular a $\overrightarrow{BD}$. Calculamos la ecuación de la recta BD:

Vector director $(-2,\,-1)$.

Punto que pertenece a BD, por ejemplo $B(3,\,1)$.

$\frac{\ \ 3}{-2}=\frac{y-}{} \;\rightarrow\; -x+3=-2y+2 \;\rightarrow\; x-2y-1=0$

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por A y C, perpendicular a BD:

Vector director $(1,\,-2)$.

La recta AC pasa por el punto medio, M, del segmento $\overrightarrow{BD}$.

$M=\left(\frac{3\quad 5}{},\frac{1-3}{2}\right)=(-1,-1)$

$\frac{x+1}{1}=\frac{}{-} \;\rightarrow\; -2x-2=y+1 \;\rightarrow\; 2x+y+3=0$

Los puntos A y C serán los $(x,\,y)$ que estén en AC y cuya distancia a M sea $\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{2\sqrt{\ }}{}\quad\sqrt{5}.$

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)\in \text{ recta } AC \;\rightarrow\; 2x+y+3=0 \;\rightarrow\; y=-3-2x\\ dist\big((x,y),M\big)=\sqrt{5} \;\rightarrow\; \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{5} \;\rightarrow\; (x+1)^2+(y+1)^2=5\end{array}\right\}\rightarrow$$

$\rightarrow\; (x+1)^2+(-3-2x+1)^2=5 \;\rightarrow\; (x+1)^2+(-2-2x)^2=5 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2+2x+1+4+8x+4x^2-5=0 \;\rightarrow\; 5x^2+10x=0 \;\rightarrow\; 5x(x+2)=0\rightarrow$

$$\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\ =0 \;\rightarrow\; y=-\\ \ =-2 \;\rightarrow\; y=\end{array}\right.$$

Los vértices A y C son; $A(-2,\,1)$ y $B(0,\,-3)$.

51347