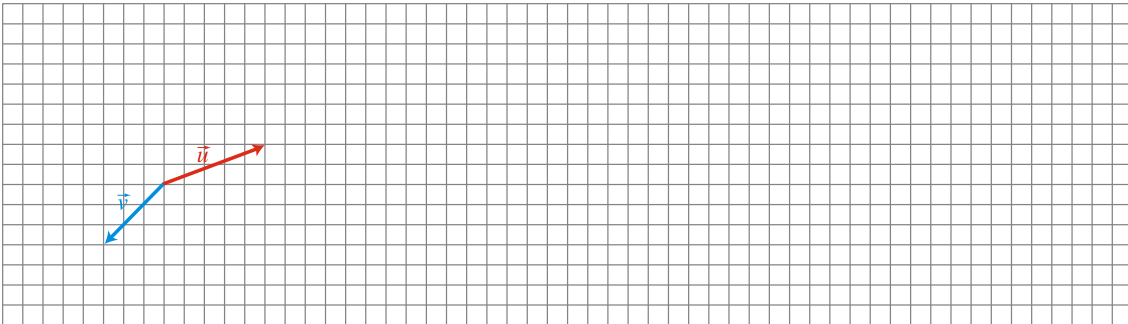


VECTORES

Ejercicio n° 1.-

a) Dibujalos vectores $\vec{u}-\vec{v}$, $-\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$ y $2\vec{u}+3\vec{v}$, siendo \vec{u} y \vec{v} los que muestra la figura:

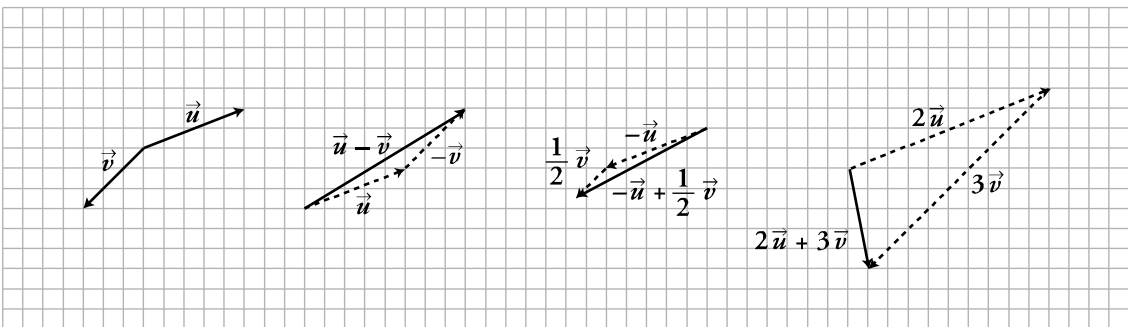


b) Dados los vectores $\vec{a}\left(\frac{2}{3}, -1\right)$ y $\vec{b}(3, -2)$, obtén las coordenadas de:

$$-3\vec{a}+2\vec{b}; \quad 2\vec{a}-\vec{b}; \quad \vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$$

Solución:

a)



$$b) -3\vec{a}+2\vec{b} = -3\left(\frac{2}{3}, -1\right) + 2(3, -2) = (-2, 3) + (6, -4) = (4, -1)$$

$$2\vec{a}-\vec{b} = 2\left(\frac{2}{3}, -1\right) - (3, -2) = \left(\frac{4}{3}, -2\right) - (3, -2) = \left(\frac{-5}{3}, 0\right)$$

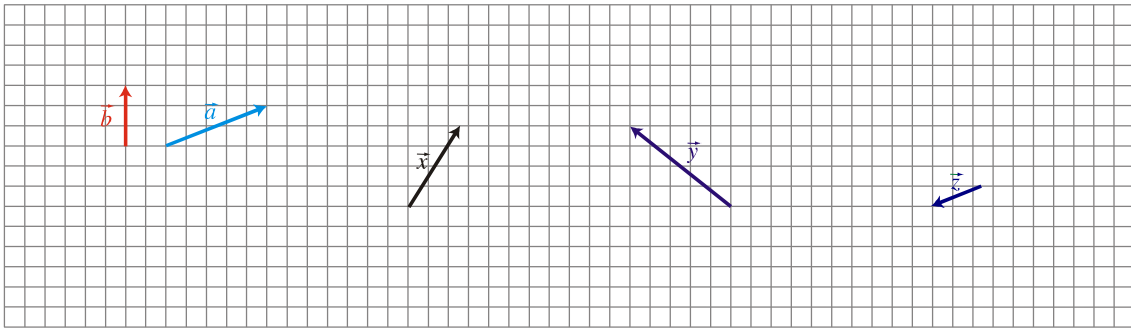
$$\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b} = \left(\frac{2}{3}, -1\right) - \frac{1}{3}(3, -2) = \left(\frac{2}{3}, -1\right) - \left(1, \frac{-2}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

Ejercicio n° 2.-

a) Halla las coordenadas del vector $\vec{u}(-2, -3)$ con respecto a la base formada por los vectores

$$\vec{v}\left(2, -\frac{1}{3}\right) \text{ y } \vec{w}(1, -1)$$

b) Expresalos vectores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ como combinación lineal de los vectores \vec{a} y \vec{b} :



Solución:

a) Hemos de hallar dos números, m y n , tales que:

$$\vec{u} = m \cdot \vec{v} + n \cdot \vec{w}, \text{ es decir}$$

$$(-2, -3) = m \cdot \left(2, -\frac{1}{3}\right) + n \cdot (1, -1)$$

$$(-2, -3) = \left(2m, -\frac{m}{3}\right) + (n, -n)$$

$$(-2, -3) = \left(2m + n, -\frac{m}{3} - n\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} -2 = 2m + n \\ -3 = -\frac{m}{3} - n \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -2 = 2m + n \\ -9 = -m - 3n \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -2 - 2m = n \\ -9 = -m - 3(-2 - 2m) \end{array} \right\}$$

$$-9 = -m + 6 + 6m \rightarrow -9 - 6 = -m + 6m \rightarrow -15 = 5m \rightarrow m = -3$$

$$n = -2 - 2m = -2 + 6 = 4$$

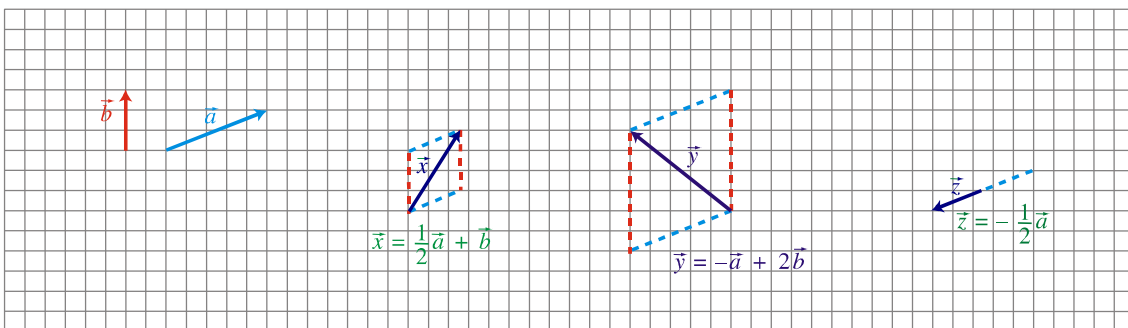
Por tanto:

$$\vec{u} = -3\vec{v} + 4\vec{w}, \text{ es decir}$$

$$(-2, -3) = -3\left(2, -\frac{1}{3}\right) + 4(1, -1)$$

Las coordenadas de \vec{u} con respecto a la base formada por \vec{v} y \vec{w} son $(-3, 4)$.

b)



Ejercicio n° 3.-

a) Calcula m de modo que el producto escalar de $\vec{a}(3, -2)$ y $\vec{b}(m, 5)$ sea igual a 5.

b) Calcula la proyección de \vec{a} sobre \vec{c} , siendo $\vec{c}(1, -3)$.

Solución:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \rightarrow (3, -2) \cdot (m, 5) = 5 \rightarrow 3m + (-2) \cdot 5 = 5 \rightarrow 3m - 10 = 5 \rightarrow 3m = 15 \rightarrow m = 5$

b) $proj_{\vec{c}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{(3, -2) \cdot (1, -3)}{\sqrt{1+9}} = \frac{3 \cdot 1 + (-2)(-3)}{\sqrt{10}} = \frac{3+6}{\sqrt{10}} = \frac{9}{\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{10}$

Ejercicio n° 4.-

Si $\vec{a} = \left(\frac{1}{4}, -3\right)$ y $\vec{b} = (4, 2)$, calcula:

a) Un vector unitario con la misma dirección y sentido que \vec{b} .

b) El ángulo formado por \vec{a} y \vec{b} .

Solución:

a) Hallamos el módulo de \vec{b} :

$$|\vec{b}| = \sqrt{4 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

El vector unitario con la misma dirección y sentido que \vec{b} será:

$$\left(\frac{4}{\sqrt{20}}, \frac{2}{\sqrt{20}}\right) = \left(\frac{4}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{2\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

b) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\left(\frac{1}{4}, -3\right) \cdot (4, 2)}{\sqrt{\frac{1}{16} + 9} \cdot \sqrt{20}} = \frac{1-6}{\sqrt{\frac{145}{16}} \cdot \sqrt{20}} = \frac{-5}{\frac{\sqrt{145}}{4} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{-5}{\frac{\sqrt{5^2 \cdot 29}}{2}} =$
$$= \frac{-5}{\frac{5\sqrt{29}}{2}} = \frac{-5}{\sqrt{29}} \approx -0,371 \rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) \approx 111,8^\circ$$

Ejercicio n° 5.-

Dados los vectores $\vec{a}(1, x)$ y $\vec{b}\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$:

a) Calcula x para que \vec{a} y \vec{b} sean perpendiculares.

b) Halla un vector unitario perpendicular a \vec{b} .

Solución:

a) Para que \vec{a} y \vec{b} sean perpendiculares, su producto escalar debe ser cero:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow (1, x) \cdot \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = 0 \rightarrow \frac{3}{5} - \frac{4}{5}x = 0 \rightarrow 3 - 4x = 0 \rightarrow x = \frac{3}{4}$$

b) Un vector perpendicular a \vec{b} es $\vec{c}(4, 3)$ cuyo módulo es $|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

El vector $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ es un vector unitario perpendicular a \vec{b} .

Ejercicio n° 6.-

Dado el vector $\vec{a}(2, 5)$ referido a una base ortonormal, ¿cómo son los vectores $\vec{b}(5, -2)$, $2\vec{b}$, $3\vec{b}$,... respecto de \vec{a} ?

Busca otro vector \vec{c} que cumpla la misma característica.

Solución:

\vec{b} es perpendicular a \vec{a} ya que $\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, 5) \cdot (5, -2) = 10 - 10 = 0$.

Del mismo modo, $2\vec{b}$, $3\vec{b}$,... son vectores perpendiculares a \vec{a} .

Un vector \vec{c} que cumple la misma característica es $\vec{c} = 5\vec{b} = (25, -10)$:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (2, 5) \cdot (25, -10) = 50 - 50 = 0$$

Dados los vectores \vec{a} y \vec{b} tales que $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 6$ y el ángulo que forman \vec{a} y \vec{b} es de 60° . Halla $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Solución:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

Luego:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2^2 + 2 \cdot 6 + 6^2 = 4 + 12 + 36 = 52 \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{52}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 2^2 - 2 \cdot 6 + 6^2 = 4 - 12 + 36 = 28 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \end{aligned}$$