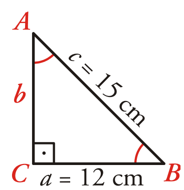
EJERCICIOS RESUELTOS: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS Y FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Ejercicio nº 1.-

En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 15 cm y uno de los catetos mide 12 cm. Calcula la longitud del otro cateto y la medida de sus ángulos.

Solución:

Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar el otro cateto:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$12^2 + b^2 = 15^2 \quad \rightarrow \quad 144 + b^2 = 225$$

$$b^2 = 225 - 144 = 81 \quad \rightarrow \quad b = 9 \text{ cm}$$

Hallamos los ángulos:

$$sen\hat{B} = \frac{b}{c} \quad \rightarrow \quad sen\hat{B} = \frac{9}{15} = 0{,}6 \quad \rightarrow \hat{B} = 36^\circ\, 52'12''$$

$$\hat{A} = 90^\circ - \hat{B} = 53^\circ\, 7'48''$$

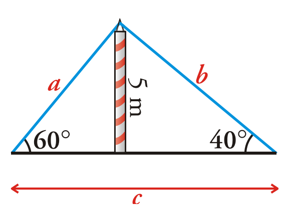
$$\hat{C} = 90^\circ$$

Por tanto:

$$a = 12 \text{ cm}; \ \hat{A} = 53^\circ\, 7'48''$$
$$b = 9 \text{ cm}; \ \hat{B} = 36^\circ\, 52'12''$$
$$c = 15 \text{ cm}; \ \hat{C} = 90^\circ$$

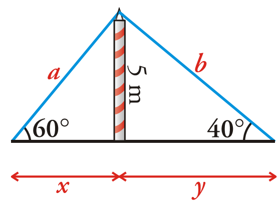
Ejercicio nº 2.-

Un mástil de 5 metros se ha sujetado al suelo con un cable como muestra la figura:



Halla el valor de *c* y la longitud del cable.

Solución:



$$sen\,60^\circ = \frac{5}{a} \quad \rightarrow \quad a = \frac{5}{sen\,60^\circ} = 5{,}77 \text{ m}$$

$$tg\,60^\circ = \frac{5}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{5}{tg\,60^\circ} = 2{,}89 \text{ m}$$

Por otra parte, si consideramos el otro triángulo:

$$sen\,40^\circ = \frac{5}{b} \quad \rightarrow \quad b = \frac{5}{sen\,40^\circ} = 7{,}78 \text{ m}$$

$$tg\,40^\circ = \frac{5}{y} \quad \rightarrow \quad y = \frac{5}{tg\,40^\circ} = 5{,}96 \text{ m}$$

Por tanto:

La longitud del cable es $a + b = 5{,}77 + 7{,}78 = 13{,}55$ metros.
El valor de c es $x + y = 2{,}89 + 5{,}96 = 8{,}85$ metros.

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Si *sen* α = 0,35 y 0° < α < 90° halla (sin calcular α):

a) $sen\,(180^\circ - \alpha)$ **b)** $cos\,(180^\circ + \alpha)$

Solución:

a) $sen\,(180^\circ - \alpha) = sen\,\alpha = 0{,}35$

b) $cos\,(180^\circ + \alpha) = -cos\,\alpha$

Necesitamos saber cuánto vale *cos* α:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad 0{,}35^2 + cos^2\alpha = 1$$

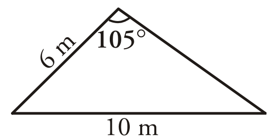
$$0{,}1225 + \cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \cos^2\alpha = 0{,}8775$$

$$cos\,\alpha = 0{,}94 \quad (\text{es positivo, pues } 0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

Por tanto, $cos(180^\circ + \alpha) = -cos\,\alpha = -0{,}94$

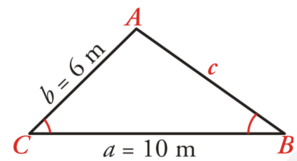
Ejercicio nº 4.-

Resuelve el siguiente triángulo, es decir, halla el valor de sus lados y de sus ángulos:



Solución:

Hallamos el ángulo $\hat{B}$ con el teorema de los senos:



$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} \quad \rightarrow \quad \frac{10}{sen105^\circ} = \frac{6}{sen\hat{B}}$$

$$sen\hat{B} = \frac{6 sen105^\circ}{10} = 0,58 \quad \rightarrow \quad \hat{B} = 35^\circ\ 25'9''$$

(Como $\hat{A}$ es obtuso, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ han de ser agudos; solo hay una solución).

Hallamos el ángulo $\hat{C}$:

$$\hat{C} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 39^\circ\ 34'51''$$

Calculamos el lado c:

$$\frac{c}{sen\hat{C}} = \frac{a}{sen\hat{A}} \rightarrow \frac{c}{sen\left(39^\circ\ 34'51''\right)} = \frac{10}{sen105^\circ} \quad \rightarrow \quad c = 6,6\ \text{m}$$

Por tanto:

$a = 10\ \text{m};\ \hat{A} = 105^\circ$
$b = 6\ \text{m};\ \hat{B} = 35^\circ\ 25'9''$
$c = 6,6\ \text{m};\ \hat{C} = 39^\circ\ 34'51''$

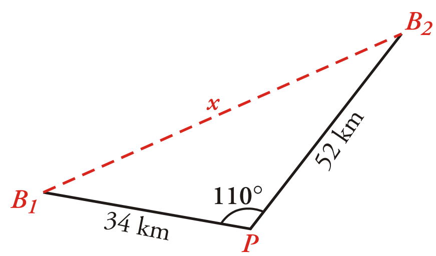
Ejercicio nº 5.-

Dos barcos salen de un puerto a la misma hora con rumbos distintos, formando un ángulo de 110°. Al cabo de 2 horas, el primer barco está a 34 km del punto inicial y el segundo barco, a 52 km de dicho

punto. En ese mismo instante, ¿a qué distancia se encuentra un barco del otro?

Solución:

Hallamos la distancia, x, aplicando el teorema del coseno:



$$x^2 = 34^2 + 52^2 - 2 \cdot 34 \cdot 52 \cdot \cos 110^\circ$$
$$x^2 = 1156 + 2704 + 1\,209{,}38$$
$$x^2 = 5069{,}38$$
$$x = 71{,}20 \text{ km}$$

Por tanto, la distancia entre los dos barcos es de 71,20 km.

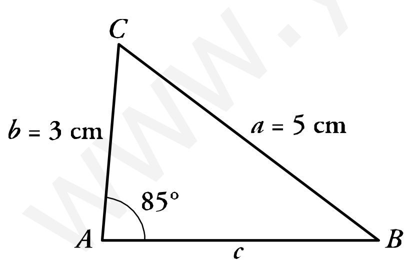
<u>Ejercicio nº 6.-</u>

a) En un triángulo se conoce $a = 5$ cm, $b = 3$ cm y $\hat{A} = 85^\circ$. ¿Cuántos triángulos hay con estos datos?

b) Comprueba que no hay ningún triángulo que cumpla $b = 5{,}8$ cm, $c = 5$ cm y $\hat{C} = 110^\circ$.

Solución:

a)



Calculamos $\hat{B}$ aplicando el teorema del seno:

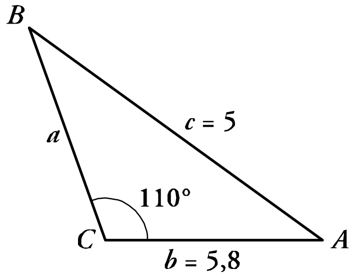
$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} \rightarrow sen\,\hat{B} = \frac{b\,sen\,\hat{A}}{a} = \frac{3\,sen\,85^\circ}{5} \approx 0{,}5977$$

Hay dos soluciones para $\hat{B}$:

$\hat{B} = 36^\circ\,42'\,24''$ y $\hat{B} = 143^\circ\,17'\,36''$ (esta no es válida pues $\hat{A} + \hat{B} > 180^\circ$)

Por tanto, solo hay un triángulo con los datos dados.

b)



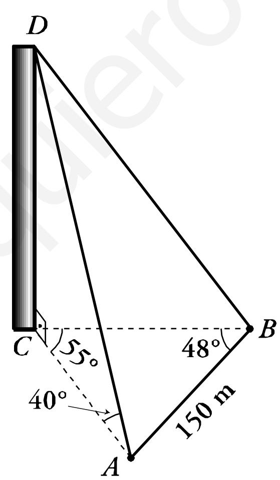
Calculamos $\hat{B}$ aplicando el teorema del seno:

$$\frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} \rightarrow sen\,\hat{B} = \frac{b\,sen\,\hat{C}}{c} = \frac{5{,}8\,sen\,110°}{5} \approx 1{,}09 > 1$$

No existe ningún triángulo con esos datos.

<u>Ejercicio nº 7.-</u>

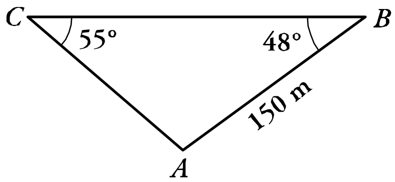
Para medir la altura de una torre *CD* nos hemos situado en los puntos *A* y *B*, cuya distancia es de 150 m y hemos tomado las medidas que aparecen en la figura.



Calcula la altura de la torre.

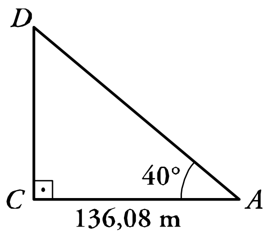
Solución:

Para calcular la altura $\overline{CD}$ en el triángulo *DCA*, necesitamos conocer $\overline{CA}$, y esto podemos obtenerlo aplicando el teorema del seno en el triángulo *CAB.*



$$\frac{150}{sen\,55°} = \frac{\overline{CA}}{sen\,48°} \;\rightarrow\; \overline{CA} = \frac{150 \cdot sen\,48°}{sen\,55°} \approx 136{,}08 \text{ m}$$

En el triángulo *DCA* se tiene:



$$tg\,40° = \frac{\overline{CD}}{136{,}08} \;\rightarrow\; \overline{CD} = 136{,}08 \cdot tg\,40° \approx 114{,}18 \text{ m}$$

La torre tiene una altura de 114,18 m.

Ejercicio nº 8.-

Demuestra la siguiente igualdad:

$$\boldsymbol{\frac{(senx + cosx)\cdot cos2x}{cosx - senx} = 1 + sen2x}$$

Solución:

$$\frac{(sen\,x + cos\,x)\cdot cos\,2x}{cos\,x - sen\,x} = \frac{(sen\,x + cos\,x)\cdot(sen\,x + cos\,x)\cdot cos\,2x}{(cos\,x - sen\,x)(cos\,x + sen\,x)} =$$

$$= \frac{(sen\,x + cos\,x)^2 \cdot cos\,2x}{cos^2 x - sen^2 x} = \frac{\left(sen^2 x + cos^2 x + 2\,sen\,x\,cos\,x\right)\cdot cos\,2x}{cos\,2x} =$$

$$= sen^2 x + cos^2 x + 2\,sen\,x\,cos\,x = 1 + 2\,sen\,x\,cos\,x = 1 + sen\,2x$$

Ejercicio nº 9.-

Resuelve la ecuación:

$$\boldsymbol{\cos 2x + sen^2 x - \frac{1}{2} = 0}$$

Solución:

$$\cos 2x + sen^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos^2 x - sen^2 x + sen^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 315^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 135^\circ + 360^\circ k \\ x = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases} \qquad \text{siendo } k \in \mathbf{Z}$$

Ejercicio nº 10.-

Demuestra que:

$$\boldsymbol{\frac{sen(a+b) + sen(a-b)}{\cos(a-b) - \cos(a+b)} = \frac{1}{tg\, b}}$$

Solución:

$sen\ (a + b) + sen\ (a - b) = sen\ a \cos b + \cos a\ sen\ b + sen\ a \cos b - \cos a\ sen\ b = 2\ sen\ a \cos b$

$\cos (a - b) - \cos (a + b) = \cos a \cos b + sen\ a\ sen\ b - (\cos a \cos b - sen\ a \quad sen\ b)$

$= 2\ sen\ a\ sen\ b$

Por tanto:

$$\frac{sen(a+b) + sen(a-b)}{\cos(a-b) - \cos(a+b)} = \frac{2\ sen\, a \cos b}{2\ sen\, a\ sen\, b} = \frac{\cos b}{sen\, b} = \frac{1}{tg\, b}$$