

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS Y FÓRMULAS MATEMÁTICAS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\operatorname{sen} 2x \cdot \cos x = 6 \cdot \operatorname{sen}^3 x$$

$$4 \cos 2x + 3 \cos x = 1$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$$

$$2 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{cotg} x - 1 = 0$$

$$\cos^2 x - 3 \operatorname{sen}^2 x = 0$$

$$\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x + 2 \operatorname{sen}^2 x = 0$$

$$2 \operatorname{sen} x + \cos x = 1$$

2. Demuestra que:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{4 + 4 \cos x}{2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x}$$

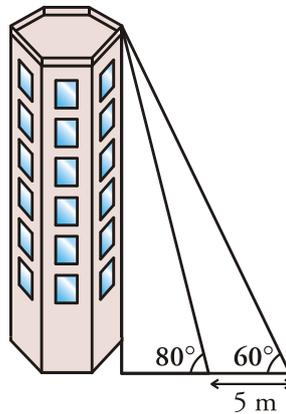
$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

- Las diagonales de un paralelogramo miden 10 y 12 cm. Uno de los ángulos que forman éstas al cortarse es de 125° . Halla el perímetro.
- Un avión vuela entre dos ciudades, A y B, que distan 80 km. Las visuales desde el avión a A y a B forman ángulos de 29° y 43° con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura está el avión?
- Para localizar una emisora clandestina, dos receptores, A y B, que distan entre sí 10 km, orientan sus antenas hacia el punto donde está la emisora.
- Estas direcciones forman con AB ángulos de 40° y 65° . ¿A qué distancia de A y B se encuentra la emisora?
- En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?
- Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: $\text{BAC} = 46^\circ$ y $\text{BCA} = 53^\circ$. ¿A

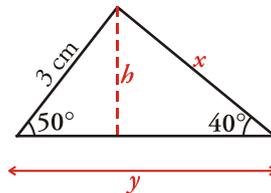
qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

9. En dos estaciones de radio, A y C , que distan entre sí 50 km, son recibidas señales que manda un barco, B . Si consideramos el triángulo de vértices A , B y C , el ángulo en A es de 65° y el ángulo en C es de 80° . ¿A qué distancia se encuentra el barco de cada una de las dos estaciones de radio?

10. Para medir la altura de una torre nos situamos en un punto del suelo y vemos el punto más alto de la torre bajo un ángulo de 60° . Nos acercamos 5 metros a la torre en línea recta y el ángulo es de 80° . Halla la altura de la torre.



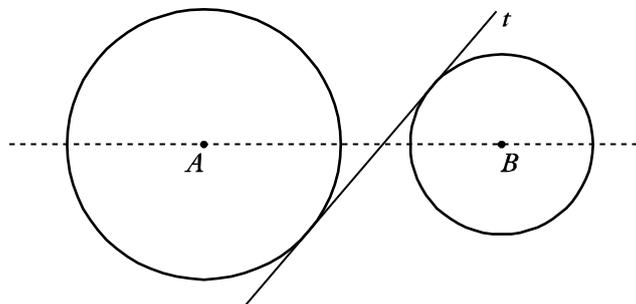
11. Halla los valores de x , y , h en el siguiente triángulo:



12. Si $\text{sen } a = 0,35$ y $0^\circ < a < 90^\circ$ halla (sin calcular a):

a) $\text{sen } (180^\circ - \alpha)$ b) $\text{cos } (180^\circ + \alpha)$

13. Las circunferencias de la figura tienen radios que se diferencian en 4 cm. El ángulo que forma la tangente a las circunferencias con la línea que une sus centros es de 50° . Sabiendo que la distancia entre sus centros es de 26,1 cm, calcula los radios de las circunferencias.



1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sin 2x \cdot \cos x = 6 \cdot \sin^3 x$

$$2\sin x \cdot \cos x \cdot \cos x = 6\sin^3 x$$

$$\sin x (\cos^2 x - 3\sin^2 x) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0^\circ + 360^\circ k \\ x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \Rightarrow x = 0^\circ + 180^\circ k$$

$$\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0 \qquad \cos^2 x = 3\sin^2 x$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3} \qquad \operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30^\circ + 180^\circ k$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 150^\circ + 180^\circ k$$

b) $4\cos 2x + 3\cos x = 1$

$$4\cos 2x = 1 - 3\cos x$$

$$4(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 - 3\cos x$$

$$4\cos^2 x - 4\sin^2 x = 1 - 3\cos x$$

$$4\cos^2 x - 4(1 - \cos^2 x) = 1 - 3\cos x$$

$$4\cos^2 x - 4 + 4\cos^2 x = 1 - 3\cos x$$

$$8\cos^2 x + 3\cos x - 5 = 0$$

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{16} = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{16} = \frac{-3 \pm 13}{16} = \begin{cases} \frac{5}{8} \\ -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{5}{8} \rightarrow \begin{cases} x = 51^\circ 19' 4'' + 360^\circ k \\ x = 308^\circ 40' 56'' + 360^\circ k \end{cases} \\ \cos x = -1 \rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad \text{siendo } k \in \mathbf{Z}$$

c) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

d) $2\operatorname{tg} x - 3\operatorname{cotg} x - 1 = 0$

Solución:

$$2\operatorname{tg} x - \frac{3}{\operatorname{tg} x} - 1 = 0$$

$$2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$$

$$x = 56^\circ 18' 35'' + 180^\circ k$$

$$\operatorname{tg} x = -1$$

$$x = 135^\circ + 180^\circ k$$

$$e) \cos^2 x - 3\text{sen}^2 x = 0$$

Solución:

$$1 - \text{sen}^2 x - 3\text{sen}^2 x = 0 \quad 1 - 4\text{sen}^2 x = 0$$

$$\text{sen}^2 x = \frac{1}{4} \quad \text{sen } x = \pm \frac{1}{2}$$

$$x = \arcsen \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$x = \arcsen \left(-\frac{1}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 210^\circ + 360^\circ k \\ x_4 = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$f) \text{sen}^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

Solución:

$$\text{sen}^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2} \quad \cos^2 x - \text{sen}^2 x = -\frac{1}{2} \quad \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = \begin{cases} 120^\circ + 360^\circ k \\ 240^\circ + 360^\circ k \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 60^\circ + 180^\circ k \\ 120^\circ + 180^\circ k \end{cases}$$

g) $\text{sen } x \text{ sen } 2x + 2 \text{sen}^2 x = 0$

Solución:

$$\text{sen } x \cdot \text{sen } 2x + 2 \text{sen}^2 x = 0$$

$$\text{sen } x \cdot 2 \text{sen } x \cos x + 2 \text{sen}^2 x = 0$$

$$2 \text{sen}^2 x \cos x + 2 \text{sen}^2 x = 0$$

$$2 \text{sen}^2 x (\cos x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} 2 \text{sen}^2 x = 0 \rightarrow \text{sen } x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0^\circ + 360^\circ k \\ x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x = -1 \rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones son:

$$\begin{cases} x = 360^\circ k \\ x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \text{ siendo } k \in \mathbf{Z}$$

h) $2 \text{sen } x + \cos x = 1$

2. Demuestra que:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{4 + 4 \cos x}{2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} &= \frac{\operatorname{sen}^2 x + (1 + \cos x)^2}{(1 + \cos x) \operatorname{sen} x} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x + 1 + 2 \cos x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x} = \frac{1 + 1 + 2 \cos x}{\operatorname{sen} x + \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{2}} = \\ &= \frac{2 + 2 \cos x}{\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}} = \frac{2 + 2 \cos x}{\frac{2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x}{2}} = \frac{4 + 4 \cos x}{2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x} \end{aligned}$$

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

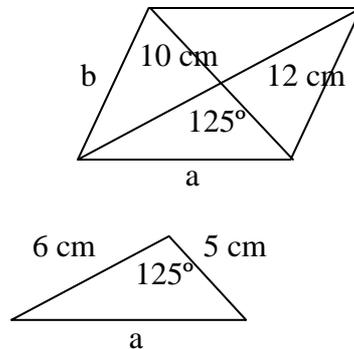
Solución:

Sabemos que $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

$$\begin{aligned} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} &= \frac{1 - \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}{2 \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}} = \frac{\frac{2 \cos x}{1 + \cos x}}{\frac{2 \sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{1 + \cos x}}} = \frac{2 \cos x \sqrt{1 + \cos x}}{2(1 + \cos x) \sqrt{1 - \cos x}} = \\ &= \frac{\cos x \cdot (\sqrt{1 + \cos x})^2}{(1 + \cos x) \sqrt{1 - \cos x} \cdot \sqrt{1 + \cos x}} = \frac{\cos x (1 + \cos x)}{(1 + \cos x) \sqrt{1 - \cos^2 x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

3. Las diagonales de un paralelogramo miden 10 y 12 cm. Uno de los ángulos que forman éstas al cortarse es de 125° . Halla el perímetro.

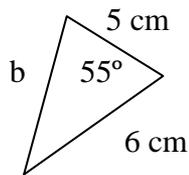
Solución:



- 1) Para hallar el valor del lado **a** utilizamos el Teorema del Coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos 125^\circ = 36 + 25 - 60 \cdot \cos 125 = 95,415$$
$$a = \sqrt{95,415} = 9,768$$

- 2) Para hallar el valor del lado **b** utilizamos el Teorema del Coseno:

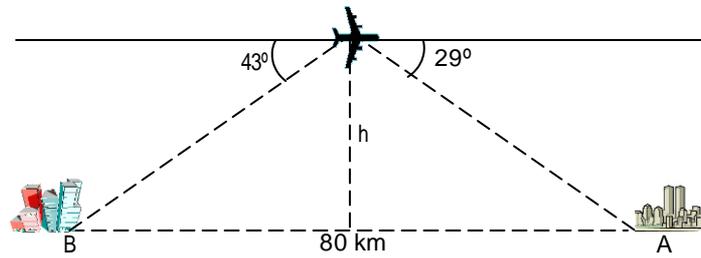


$$b^2 = a^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{B} = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos 55^\circ = 36 + 25 - 60 \cdot \cos 55^\circ = 26,585$$
$$a = \sqrt{95,415} = 5,1561$$

- 3) Hallamos el Perímetro del paralelogramo

$$P = 2 \cdot 9,768 + 2 \cdot 5,1561 = 63,482 \text{ cm}$$

4. Un avión vuela entre dos ciudades, A y B, que distan 80 km. Las visuales desde el avión a A y a B forman ángulos de 29° y 43° con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura está el avión?



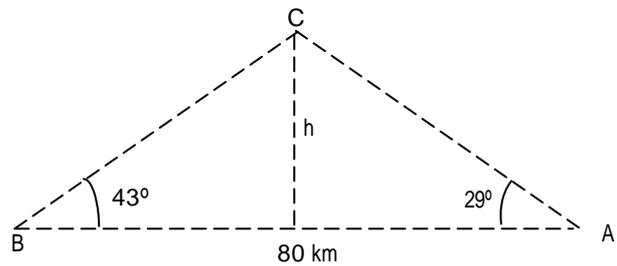
Solución

Aplicamos el teorema del seno, para calcular la distancia a cada ciudad:

$$C = 180^\circ - (29^\circ + 43^\circ) = 108^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin 108^\circ} = \frac{AC}{\sin 43^\circ} \quad AC = \frac{80 \cdot \sin 43^\circ}{\sin 108^\circ} = 57,36 \text{ km}$$

$$\frac{AB}{\sin 108^\circ} = \frac{BC}{\sin 29^\circ} \quad BC = \frac{80 \cdot \sin 29^\circ}{\sin 108^\circ} = 40,78 \text{ km}$$



Para calcular la altura:

$$\sin 29^\circ = \frac{h}{AC} \rightarrow h = AC \cdot \sin 29^\circ = 27,81 \text{ km}$$

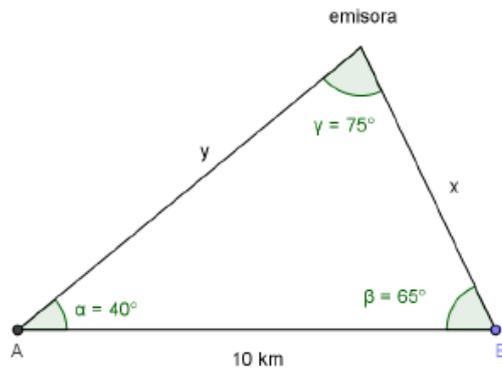
5. Para localizar una emisora clandestina, dos receptores, A y B, que distan entre sí 10 km, orientan sus antenas hacia el punto donde está la emisora. Estas direcciones forman con AB ángulos de 40° y 65° . ¿A qué distancia de A y B se encuentra la emisora?

Teorema del seno

$$\frac{10}{\operatorname{sen} 75^\circ} = \frac{x}{\operatorname{sen} 40^\circ} = \frac{y}{\operatorname{sen} 65^\circ}$$

$$\frac{10}{\operatorname{sen} 75^\circ} = \frac{x}{\operatorname{sen} 40^\circ} \rightarrow x = \frac{10 \cdot \operatorname{sen} 40^\circ}{\operatorname{sen} 75^\circ}$$

$$x \cong 6,65 \text{ km}$$



$$\frac{10}{\operatorname{sen} 75^\circ} = \frac{y}{\operatorname{sen} 65^\circ} \rightarrow y = \frac{10 \cdot \operatorname{sen} 65^\circ}{\operatorname{sen} 75^\circ}; y \cong 9,38 \text{ km}$$

6. En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?

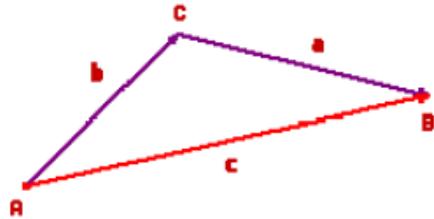
Tenemos que calcular la medida de \hat{A} , siendo $AC = 13 \text{ m}$, $AB = 17 \text{ m}$ y $BC = 7 \text{ m}$.

Aplicando el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow 7^2 = 13^2 + 17^2 - 2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \cos \hat{A}$$

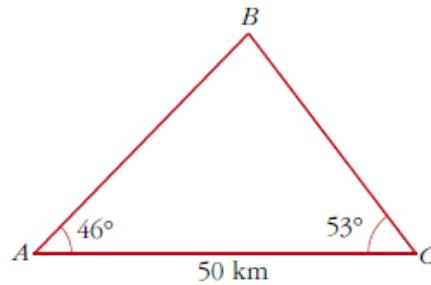
$$\text{de donde } \cos \hat{A} = \frac{49 - 169 - 289}{-442} = 0,925339$$

$$\hat{A} = \arccos 0,925339 \Rightarrow \hat{A} = 55^\circ 31'$$



7. Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: $\widehat{BAC} = 46^\circ$ y $\widehat{BCA} = 53^\circ$. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

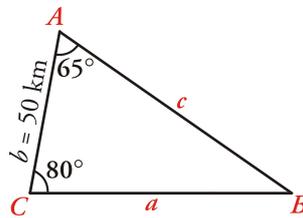
$$\widehat{B} = 180^\circ - 46^\circ - 53^\circ = 81^\circ$$



$$\begin{aligned} \bullet \frac{a}{\widehat{A}} &= \frac{b}{\widehat{B}} \rightarrow a = \frac{b \widehat{A}}{\widehat{B}} = \frac{50 \cdot \widehat{A}}{\widehat{B}} = \frac{50 \cdot \widehat{A}}{\widehat{B}} = 36,4 \text{ km} \\ \bullet \frac{c}{\widehat{C}} &= \frac{b}{\widehat{B}} \rightarrow c = \frac{b \widehat{C}}{\widehat{B}} = \frac{50 \cdot \widehat{C}}{\widehat{B}} = \frac{50 \cdot \widehat{C}}{\widehat{B}} = 40,4 \text{ km} \end{aligned}$$

8. En dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km, son recibidas señales que manda un barco, B. Si consideramos el triángulo de vértices A, B y C, el ángulo en A es de 65° y el ángulo en C es de 80° . ¿A qué distancia se encuentra el barco de cada una de las dos estaciones de radio?

Solución:



Hallamos el ángulo \widehat{B} :

$$\widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 35^\circ$$

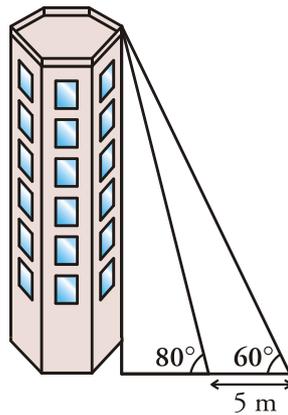
Hallamos los valores de a y c aplicando el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\widehat{A}} = \frac{50}{\widehat{B}} \rightarrow a = \frac{50 \widehat{A}}{\widehat{B}} = \frac{50 \widehat{A}}{\widehat{B}} = 79 \text{ km}$$

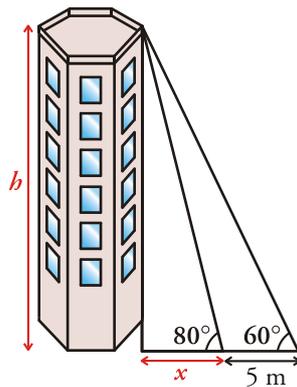
$$\frac{c}{\widehat{C}} = \frac{50}{\widehat{B}} \rightarrow c = \frac{50 \widehat{C}}{\widehat{B}} = \frac{50 \widehat{C}}{\widehat{B}} = 85,85 \text{ km}$$

Por tanto, el barco está a 79 km de la estación C y a 85,85 km de la estación A.

9. Para medir la altura de una torre nos situamos en un punto del suelo y vemos el punto más alto de la torre bajo un ángulo de 60° . Nos acercamos 5 metros a la torre en línea recta y el ángulo es de 80° . Halla la altura de la torre.



Solución:



$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 80^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{x+5} \end{array} \right\} \begin{array}{l} h = x \operatorname{tg} 80^\circ \\ h = (x+5) \operatorname{tg} 60^\circ \end{array}$$

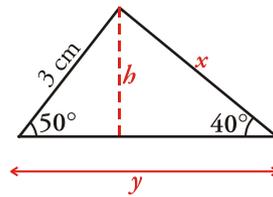
$$\begin{aligned} x \operatorname{tg} 80^\circ &= (x+5) \operatorname{tg} 60^\circ \\ x \operatorname{tg} 80^\circ &= x \operatorname{tg} 60^\circ + 5 \operatorname{tg} 60^\circ \\ x \operatorname{tg} 80^\circ - x \operatorname{tg} 60^\circ &= 5 \operatorname{tg} 60^\circ \\ x(\operatorname{tg} 80^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ) &= 5 \operatorname{tg} 60^\circ \end{aligned}$$

$$x = \frac{5 \operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{tg} 80^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ} = 2,20 \text{ m}$$

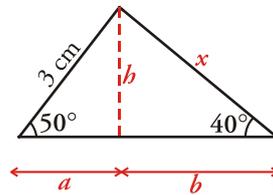
$$h = x \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = 12,47 \text{ m}$$

La torre tiene una altura de 12,47 metros.

10. Halla los valores de x , y , h en el siguiente triángulo:



Solución:



$$\operatorname{sen}50^\circ = \frac{h}{3} \rightarrow h = 3 \operatorname{sen}50^\circ = 2,30 \text{ cm}$$

$$\operatorname{cos}50^\circ = \frac{a}{3} \rightarrow a = 3 \operatorname{cos}50^\circ = 1,93 \text{ cm}$$

Si consideramos el otro triángulo, tenemos que:

$$\operatorname{sen}40^\circ = \frac{h}{x} = \frac{2,30}{x} \rightarrow x = \frac{2,30}{\operatorname{sen}40^\circ} = 3,58 \text{ cm}$$

$$\operatorname{cos}40^\circ = \frac{b}{x} = \frac{b}{3,58} \rightarrow b = 3,58 \cdot \operatorname{cos}40^\circ = 2,74$$

Por tanto:

$$x = 3,58 \text{ cm}$$

$$y = a + b = 1,93 + 2,74 = 4,67 \text{ cm}$$

$$h = 2,30 \text{ cm}$$

11. Si $\operatorname{sen} a = 0,35$ y $0^\circ < a < 90^\circ$ halla (sin calcular a):

a) $\operatorname{sen} (180^\circ - \alpha)$ b) $\operatorname{cos} (180^\circ + \alpha)$

Solución:

Necesitamos saber cuánto vale $\operatorname{cos} a$:

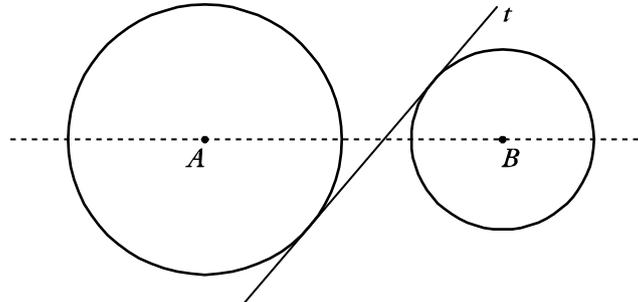
$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow 0,35^2 + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

$$0,1225 + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = 0,8775$$

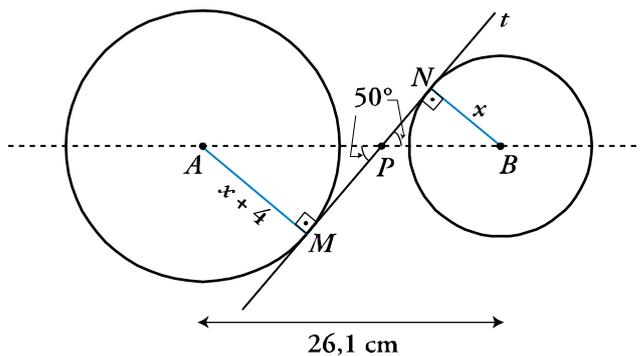
$$\operatorname{cos} \alpha = 0,94 \text{ (es positivo, pues } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \text{)}$$

Por tanto, $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha = -0,94$

12. Las circunferencias de la figura tienen radios que se diferencian en 4 cm. El ángulo que forma la tangente a las circunferencias con la línea que une sus centros es de 50° . Sabiendo que la distancia entre sus centros es de 26,1 cm, calcula los radios de las circunferencias.



Solución:



Llamamos:

$x \rightarrow$ Radio de la circunferencia pequeña

$x + 4 \rightarrow$ Radio de la otra circunferencia

En el triángulo AMP se cumple: $\text{sen}50^\circ = \frac{x+4}{AP}$

En el triángulo BNP se cumple: $\text{sen}50^\circ = \frac{x}{PB} = \frac{x}{AB - AP} = \frac{x}{26,1 - AP}$

Resolvemos el sistema formado:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen}50^\circ &= \frac{x+4}{AP} \\ \text{sen}50^\circ &= \frac{x}{26,1 - AP} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\rightarrow x+4 = \overline{AP} \text{sen}50^\circ \\ &\rightarrow x = (26,1 - \overline{AP}) \text{sen}50^\circ \rightarrow x = 26,1 \text{sen}50^\circ - \overline{AP} \text{sen}50^\circ \rightarrow \\ &\rightarrow x = 26,1 \text{sen}50^\circ - x - 4 \rightarrow 2x \approx 16 \rightarrow x \approx 8 \text{ cm} \rightarrow x+4 = 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

Por tanto, los radios de las circunferencias miden 8 cm y 12 cm.