

Ejercicios de cónicas 1º bachillerato C

1) Clasifica las siguientes cónicas y expresa sus focos y su excentricidad:

a) $x^2 + y^2 + 4x - 11y - 12 = 0$

b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

d) $2x^2 - 3y^2 = 108$

e) $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$

f) $x^2 = 20y$

g) $x^2 = -10y$

h) $y^2 = 8x$

i) $y^2 = -16x$

Soluciones:

a) Circunferencia de centro $(-2, \frac{11}{2})$ y radio $3\sqrt{2}$. Excentricidad $e = 0$

b) Elipse con los focos en el eje X. Focos: $F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$, $e = \frac{4}{5}$

c) Elipse con los focos en el eje Y. Focos: $F(0, 2\sqrt{3})$, $F'(0, -2\sqrt{3})$, $e = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) Hipérbola con los focos en el eje X. Focos: $F(3\sqrt{10}, 0)$, $F'(-3\sqrt{10}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{15}}{3}$

e) Hipérbola con los focos en el eje Y. Focos: $F(0, \sqrt{5})$, $F'(0, -\sqrt{5})$, $e = \sqrt{5}$

f) Parábola de eje el eje de ordenadas. Foco $F(0, 5)$ directriz $y = -5$; $e = 1$

g) Parábola de eje el eje de ordenadas. Foco $F(0, -\frac{5}{2})$ directriz $y = \frac{5}{2}$; $e = 1$

h) Parábola de eje el eje de abscisas. Foco $F(2, 0)$ directriz $x = -2$; $e = 1$

i) Parábola de eje el eje de abscisas, Foco $F(-4, 0)$ directriz $x = 4$; $e = 1$

2) Hallar la ecuación de una circunferencia que tiene su centro en la recta $3x - 2y = 5$, y que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(5, 1)$

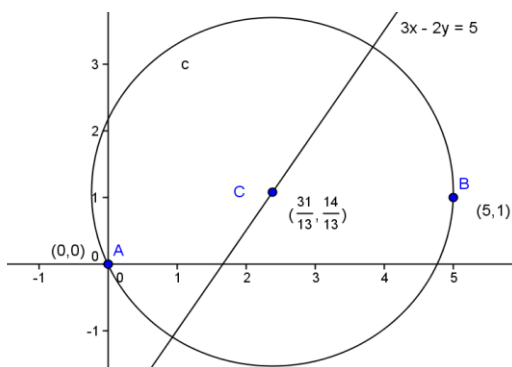
Ecuación de la circunferencia de centro $C(a, b)$ y radio r : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

- $C(a, b) \in 3x - 2y = 5 \rightarrow 3a - 2b = 5$

- $(0, 0) \in \text{circunferencia} \rightarrow (0-a)^2 + (0-b)^2 = r^2$ Sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

- $(5, 1) \in \text{circunferencia} \rightarrow (5-a)^2 + (1-b)^2 = r^2$

$$\begin{cases} 3a - 2b = 5 \\ a^2 + b^2 = r^2 \\ 25 - 10a + 1 - 2b + a^2 + b^2 = r^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 5 \\ 10a + 2b = 26 \end{cases} \quad a = \frac{31}{13} \quad b = \frac{14}{13}$$



Ecuación de la circunferencia:

$$\left(x - \frac{31}{13}\right)^2 + \left(y - \frac{14}{13}\right)^2 = \frac{89}{13}$$

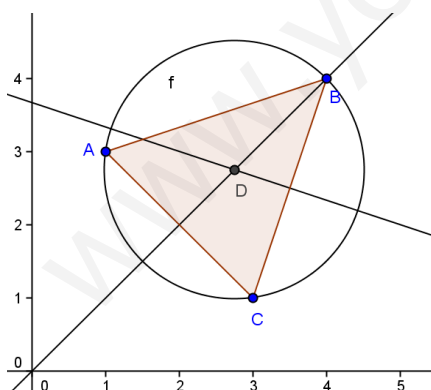
- 3) Dados los puntos A(1,3), B(4,4), C(3, 1), hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo que determinan.

Método 1: Calcular el circuncentro del triángulo

$$\begin{cases} \text{Mediatriz correspondiente al lado AC: } x = y \\ \text{Mediatriz correspondiente lado BC: } y - \frac{5}{2} = \frac{-1}{3}x + \frac{7}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ y - \frac{5}{2} = \frac{-1}{3}x + \frac{7}{6} \end{cases} \quad \text{Circuncentro } \left(\frac{11}{4}, \frac{11}{4}\right)$$

$$\text{Radio} = \text{distancia de un vértice al circuncentro} = \sqrt{\left(4 - \frac{11}{4}\right)^2 + \left(4 - \frac{11}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$



$$\text{Ecuación circunferencia: } \left(x - \frac{11}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = \frac{25}{8}$$

Método 2 (este es el método más idóneo): Por la ecuación general de la circunferencia

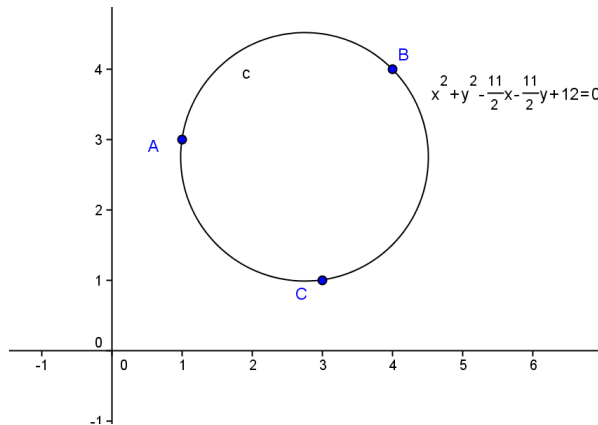
$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

- $(1, 3) \in \text{circunferencia} \rightarrow 1 + 9 + A + 3B + C = 0$
- $(4, 4) \in \text{circunferencia} \rightarrow 16 + 16 + 4A + 4B + C = 0$
- $(3, 1) \in \text{circunferencia} \rightarrow 9 + 1 + 3A + B + C = 0$

$$\begin{cases} A + 3B + C = -10 \\ 4A + 4B + C = -32 \\ 3A + B + C = -10 \end{cases} \text{ sistema que se resuelve por método de Gauss}$$

Solución: $\left(A = \frac{-11}{2}, B = \frac{-11}{2}, C = 12\right)$

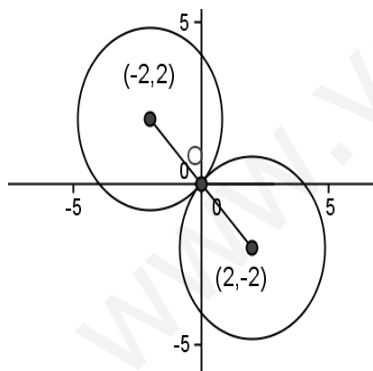
Ecuación de la circunferencia en forma general: $x^2 + y^2 - \frac{11}{2}x - \frac{11}{2}y + 12 = 0$



- 4) Determinar la ecuación de la circunferencia de radio $2\sqrt{2}$ que pasa por el origen de coordenadas y cuyo centro está situado en la bisectriz del 2º cuadrante.

$$\begin{cases} \text{radio } 2\sqrt{2} \rightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = 8 \\ \text{pasa por } (0,0) \rightarrow a^2 + b^2 = 8 \\ \text{centro en la bisectriz del 2º cuadrante} \rightarrow a = -b \end{cases} \quad \text{Sistema que tiene dos soluciones}$$

$$b = \pm 2 \rightarrow \begin{aligned} b = 2 \text{ entonces } a = -2 &\rightarrow \text{Centro } (-2, 2) \\ b = -2 \text{ entonces } a = 2 &\rightarrow \text{Centro } (2, -2) \end{aligned}$$



Existen dos circunferencias:

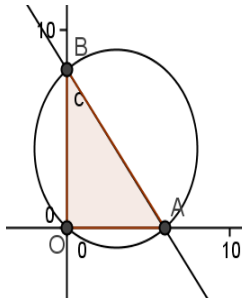
$$\begin{aligned} c_1 : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 &= 8 \\ c_2 : (x - 2)^2 + (y + 2)^2 &= 8 \end{aligned}$$

- 5) La recta $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$ forma un triángulo con los ejes coordenados. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita.

Punto de corte con eje X: $\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow (6, 0)$

Punto de corte con eje Y: $\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow (0, 8)$

Triángulo O(0,0); A(6,0); B(0,8)



Ecuación general de la circunferencia :

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

- $(0,0) \in \text{circunferencia} \rightarrow 0 + 0 + 0 + 0 + C = 0 \rightarrow C = 0$
- $(6,0) \in \text{circunferencia} \rightarrow 36 + 0 + 6A + C = 0$
- $(0,8) \in \text{circunferencia} \rightarrow 0 + 64 + 8B + C = 0$

$$\begin{cases} C = 0 \\ 6A + 36 = 0 \\ 8B + 64 = 0 \end{cases} \quad \text{Solución: } (A = -6, B = -8, C = 0)$$

Ecuación de la circunferencia en forma general: $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

- 6) Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje de abscisas en el punto A(6,0) y es tangente también a la recta de ecuación $4x + 3y = 64$

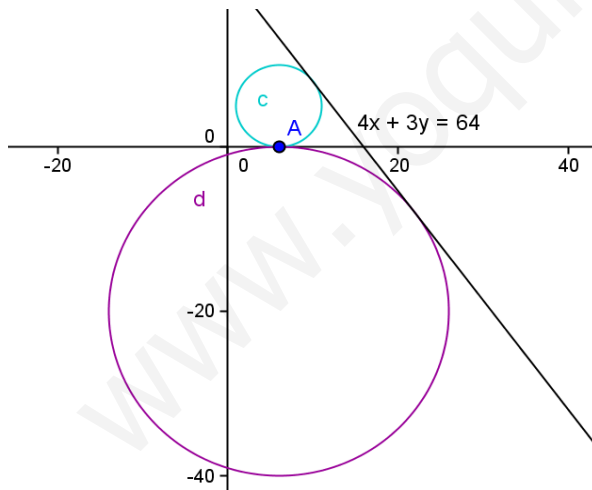
Ecuación de la circunferencia de centro C(a, b) y radio r : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

- La recta $y = 0$ es tangente a la circunferencia en A(6,0) y como el radio y la tangente son perpendiculares en el punto de tangencia $\rightarrow$ el centro es un punto de la recta $X = 6$, luego el centro es C(6,b)
- El radio es la distancia del centro a las rectas tangentes $\rightarrow |b| = \frac{|4 \cdot 6 + 3b - 64|}{5}$

$$b = \frac{3b-40}{5}; \quad b = -20$$

ecuación que tiene dos soluciones:

$$b = -\frac{3b-40}{5}; \quad b = 5$$

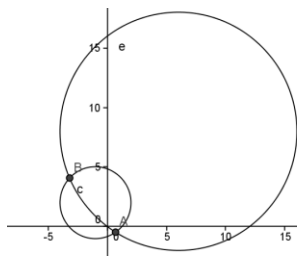


Existen dos circunferencias:

$$c_1 : (x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

$$c_2 : (x - 6)^2 + (y + 20)^2 = 400$$

- 7) Determina la posición relativa que ocupan las circunferencias: $x^2 + y^2 - 12x - 16y = 0$;
 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$;



$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 12x - 16y = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow 7x + 6y = 2; x = \frac{2-6y}{7}$$

Sustituimos el valor de x en cualquiera de las dos circunferencias

$$\left(\frac{2-6y}{7}\right)^2 + y^2 - 12\frac{2-6y}{7} - 16y = 0$$

$85y^2 - 304y - 164 = 0$ ecuación que tiene dos soluciones por tanto las dos circunferencias se cortan en dos puntos, es decir: son secantes

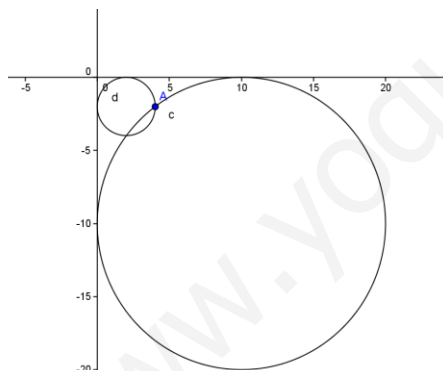
- 8) Determinar la ecuación de una circunferencia que pasa por $(4, -2)$ y es tangente a los ejes coordenados.

Ecuación de la circunferencia de centro $C(a, b)$ y radio r : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

- $(4, -2) \in \text{circunferencia} \rightarrow (4-a)^2 + (-2-b)^2 = r^2$
- La recta $y = 0$ es tangente a la circunferencia $\rightarrow |b| = r$
- La recta $x = 0$ es tangente a la circunferencia $\rightarrow |a| = r$

Por tanto $|b| = |a| = r$ ecuación que tiene dos soluciones: $b = a$
 $b = -a$

- Si $b = a \rightarrow (4-a)^2 + (-2-a)^2 = a^2$ esta ecuación no tiene solución real
- Si $b = -a \rightarrow (4-a)^2 + (-2+a)^2 = a^2$ ecuación con dos soluciones: $a = 10$
 $a = 2$

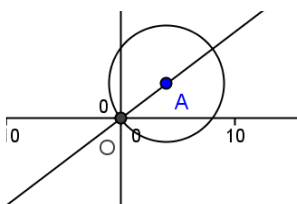


Existen dos circunferencias:

$$c_1: (x-10)^2 + (y+10)^2 = 100$$

$$c_2: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

- 9) Hallar la ecuación del diámetro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ que pasa por el origen.

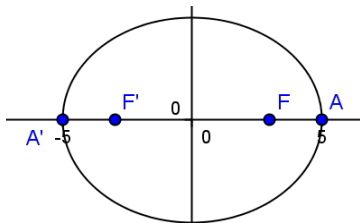


Un diámetro siempre pasa por el centro de la circunferencia y por un punto de la circunferencia.

Centro de la circunferencia $\begin{cases} -8 = -2a; & a = 4 \\ -6 = -2b; & b = 3 \end{cases} \quad C(4, 3)$

Ecuación diámetro: $\frac{x-0}{4-0} = \frac{y-0}{3-0} \rightarrow y = \frac{3}{4}x$

- 10) Un punto de una elipse dista de cada uno de sus focos 2 y 8 cm. Sabiendo que la distancia focal es 6 m. Se pide:
- La ecuación reducida de la elipse
 - Los focos y la excentricidad



Como en la elipse la suma de distancias es constante e igual a $2a \rightarrow 2+8=2a$; $a=5$

Distancia focal $= 2c$; $2c=6$; $c=3$

En la elipse se verifica $a^2 = b^2 + c^2$; $25 = b^2 + 9$;
 $b=4$

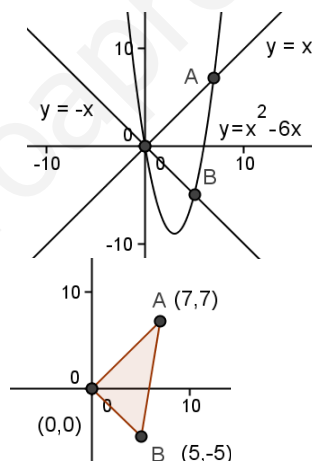
Ecuación reducida de la elipse: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Focos: $F(3,0)$; $F'(-3,0)$; excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$

- 11) Hallar las coordenadas de los puntos en que las bisectrices de los ángulos formados por los ejes coordenados cortan a la parábola $y = x^2 - 6x$. Los puntos de intersección son vértices de un triángulo. Se pide calcular el área del mismo.

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x \\ y = x \end{cases} \text{ solución: } O(0,0); A(7,7)$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x \\ y = -x \end{cases} \text{ solución: } O(0,0); B(5,-5)$$



Triángulo: $O(0,0)$; $A(7,7)$; $B(5,-5)$

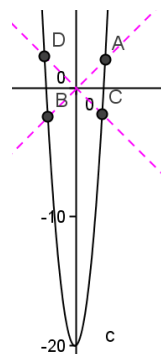
El triángulo es rectángulo porque el lado OA y el lado OB son perpendiculares por pertenecer a las bisectrices que son rectas perpendiculares.

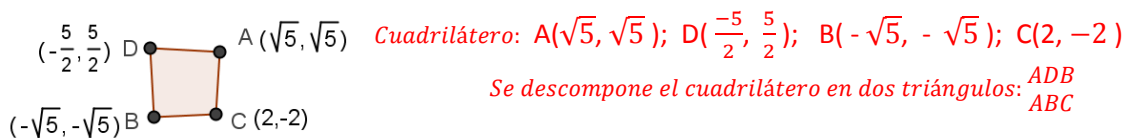
$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OA} = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 35 u^2$$

- 12) Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola $y = 4x^2 + x - 20$ con las bisectrices de los cuatro cuadrantes formados por los ejes coordenados. Dichos puntos son vértices de un cuadrilátero. Se pide hallar el área del mismo.

$$\begin{cases} y = 4x^2 + x - 20 \\ y = x \end{cases} \text{ solución: } A(\sqrt{5}, \sqrt{5}); B(-\sqrt{5}, -\sqrt{5})$$

$$\begin{cases} y = 4x^2 + x - 20 \\ y = -x \end{cases} \text{ solución: } C(2, -2); D\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$





Área triángulo ADB: $\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \text{distancia}(D, \text{recta } AB) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{[5]}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{5}$

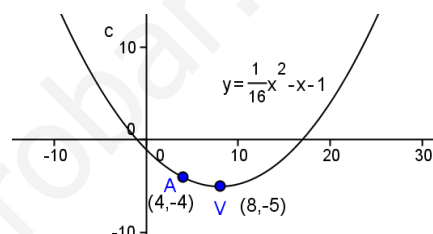
Área triángulo ABC: $\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \text{distancia}(C, \text{recta } AB) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{[4]}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{5}$

Área del cuadrilátero = $9\sqrt{5} \text{ u}^2$

13) Hallar la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ sabiendo que pasa por los puntos $P(4, -4)$ y $V(8, -5)$; siendo este último el vértice de la misma.

- $(4, -4) \in \text{parábola} \rightarrow -4 = 16a + 4b + c$
- $(8, -5) \in \text{parábola} \rightarrow -5 = 64a + 8b + c$
- $(8, -5) \text{ es el vértice} \rightarrow 8 = \frac{-b}{2a}$

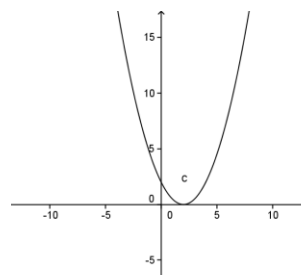
$$\begin{cases} -4 = 16a + 4b + c \\ -5 = 64a + 8b + c \\ 8 = \frac{-b}{2a} \end{cases}$$
 Sistema que se resuelve por Gauss;



solución: $(a = \frac{1}{16}, b = -1, c = -1) \rightarrow y = \frac{1}{16}x^2 - x - 1$

14) Dibujar la parábola $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

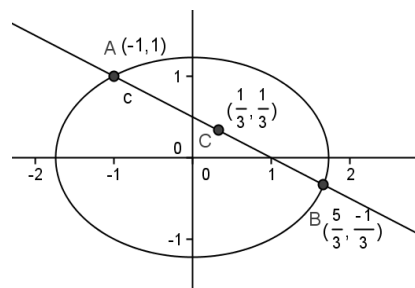
- Curvatura
- Puntos de corte con eje X; corta en el punto $(2, 0)$
- Vértice $(2, 0)$
- Punto de corte con eje Y: $(0, 2)$



15) Hallar las coordenadas del punto medio de la cuerda que intercepta la recta $x + 2y - 1 = 0$ en la elipse $x^2 + 2y^2 = 3$

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$
 sistema con dos soluciones: $A(-1, 1)$ $B(\frac{5}{3}, \frac{-1}{3})$

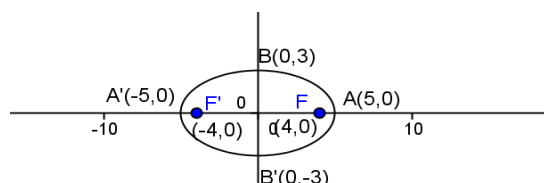
Punto medio de la cuerda AB $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$



16) Calcular la excentricidad de la cónica $9x^2 + 25y^2 = 225$

Ecuación reducida: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

$a = 5$; $b = 3$; $c = 4$; excentricidad: $e = \frac{4}{5}$

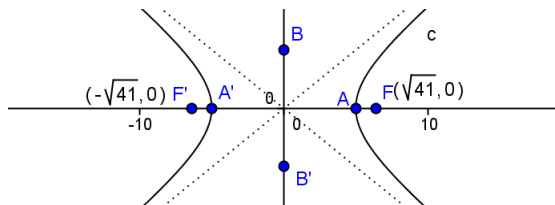


- 17) Dada la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$, hallar su excentricidad, las coordenadas de los focos y la ecuación de sus asíntotas.

$a=5$ $b=4$ como en la hipérbola $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{41}$; excentricidad $e = \frac{\sqrt{41}}{5}$

Focos: $F(\sqrt{41}, 0)$ $F'(-\sqrt{41}, 0)$

Asíntotas:
 $y = \frac{4}{5}x$
 $y = -\frac{4}{5}x$

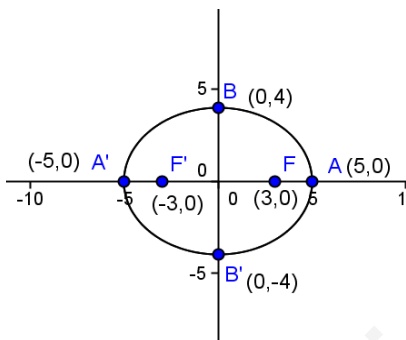


- 18) Si los ejes de una elipse miden 10 cm y 8 cm, respectivamente calcula su excentricidad

$$10 = 2a \rightarrow a = 5$$

$$8 = 2b \rightarrow b = 4$$

En la elipse se verifica $c^2 + b^2 = a^2 \rightarrow c = 3$; excentricidad $e = \frac{3}{5}$

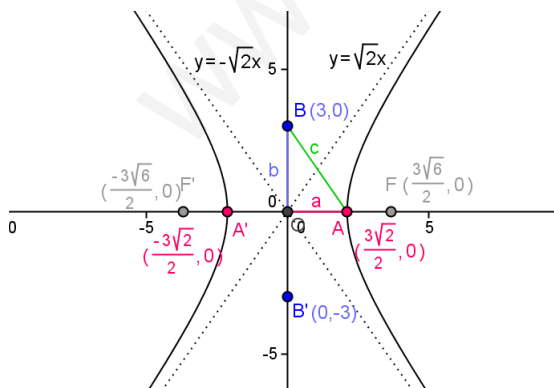


- 19) Dibujar la hipérbola $2x^2 - y^2 = 9$ previo cálculo de vértices, focos y asíntotas.

Ecuación de una hipérbola con el eje transversal en el eje X, los focos están en el eje X.

$$\frac{x^2}{\frac{9}{2}} - \frac{y^2}{9} = 1;$$

semiejes: $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ $b = 3$ en la hipérbola se cumple: $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \frac{3\sqrt{6}}{2}$



vértices: $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ $B(0, 3)$
 $A'\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ $B'(0, -3)$

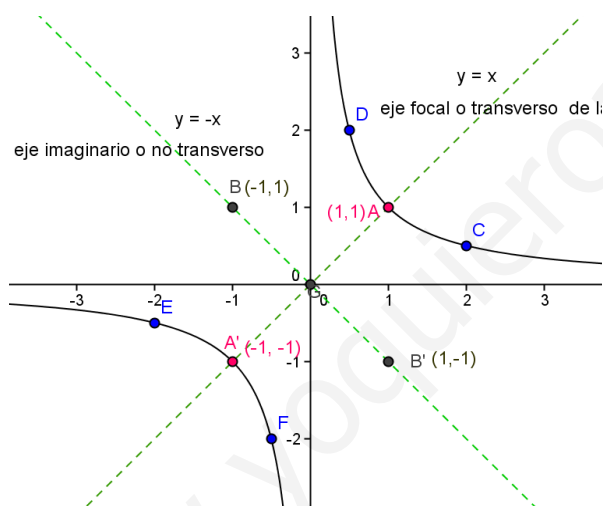
Focos: $F\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}, 0\right)$ $F'\left(-\frac{3\sqrt{6}}{2}, 0\right)$ Asíntotas: $y = \sqrt{2}x$
 $y = -\sqrt{2}x$

20) Representa, dando valores a x , la hipérbola de ecuación $xy = 1$. ¿Cuáles son las ecuaciones de sus asíntotas? ¿y las de los ejes de la cónica? ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices?

$xy = 1$ es la ecuación de la hipérbola equilátera (ejes iguales) referida a sus asíntotas ($y = x$; $y = -x$) .

Despejando $y = \frac{1}{x}$ resulta la ecuación explícita de la función ya conocida como función de proporcionalidad inversa.

- Las asíntotas son los ejes coordenados $\begin{matrix} \text{eje } X: y = 0 \\ \text{eje } Y: x = 0 \end{matrix}$
- Los ejes de la cónica son las rectas $y = x$ e $y = -x$
- Vértices: $A(1,1)$; $A'(-1,-1)$
 $B(-1,1)$; $B'(1,-1)$;



x	$y = \frac{1}{x}$
1	1
2	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	2
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
-2	$-\frac{1}{2}$