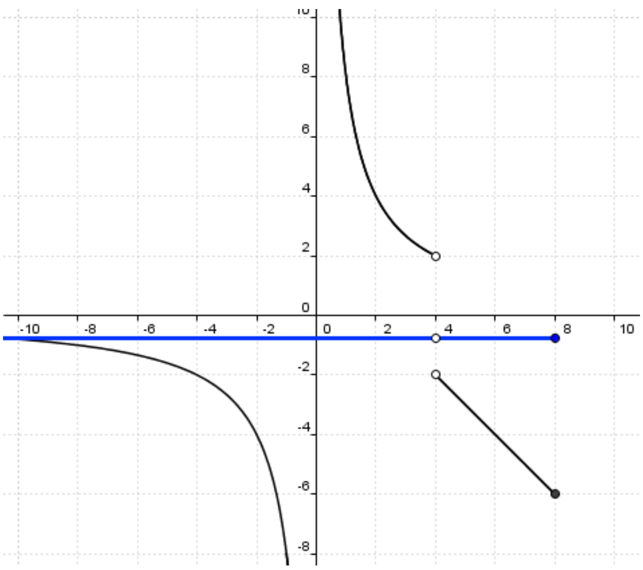
1. DOMINIO

Dominio de *f*(*x*) o campo de existencia de *f*(*x*) es el conjunto de valores para los que está definida la función, es decir, el conjunto de valores que toma la variable independiente “*x*”. Se denota por Dom(*f*).

$$Dom(f)=\{x\in\Re\,/\,\exists\, y\in\Re \;\; con\; y=f(x)\}$$

OBTENCIÓN DEL DOMINIO DE DEFINICIÓN A PARTIR DE LA GRÁFICA



Cuando una función se presenta a través de su gráfica, con proyectar sobre el eje de abscisas (eje OX) dicha gráfica conseguimos su dominio de definición. Esto es así porque cualquier valor “*x*” del dominio tiene una imagen “ $y=f(x)$ ”, y, por lo tanto, le corresponde un punto (x,y) de la gráfica. Este punto es el que, al proyectar dicha imagen sobre el eje OX, nos incluye ese valor dentro del dominio.

En el ejemplo vemos coloreado de azul el dominio (está dibujado un poco más abajo para que sea bien visible la escala del eje de abscisas). En este caso tenemos que $Dom(f)=(-\infty,4)\cup(4,8]$.

De una manera no formal, podríamos decir que si aplastamos la gráfica sobre el eje OX y ésta estuviese manchada de tinta, quedaría manchado sobre el eje justo el dominio de definición de la función *f*.

OBTENCIÓN DEL DOMINIO A PARTIR DE LA EXPRESIÓN ANALÍTICA

I) **FUNCIÓN POLINÓMICA**: $f(x)=P(x)\Rightarrow Dom(f)=\Re$

Ejemplos

a) $f(x)=x^3-5x^2+\dfrac{2}{3}x-5$ función polinómica $\Rightarrow Dom(f)=\Re$

b) $f(x)=\sqrt{2}x^4-x^2+\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-1$ función polinómica $\Rightarrow Dom(f)=\Re$

II) **FUNCIÓN RACIONAL**: $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}\Rightarrow Dom(f)=\Re-\{x\,/\,Q(x)=0\}$

Ejemplos

a) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x-5}$ función racional $\Rightarrow Dom(f)=\Re-\{x\in\Re\,/\,x^2-4x-5=0\}=\Re-\{-1{,}5\}$

$$x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}=\begin{cases}\dfrac{4+6}{2}=5\\[2ex]\dfrac{4-6}{2}=-1\end{cases}$$

b) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+4}$ función racional $\Rightarrow Dom(f)=\Re-\{x\in\Re / x^2+4=0\}=\Re$

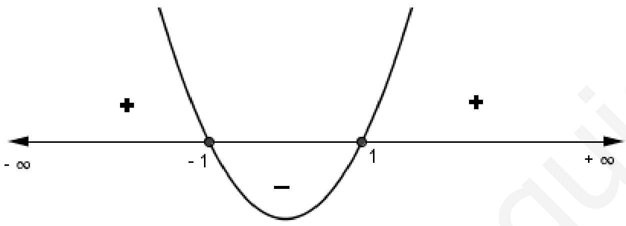
$$x^2+4=0 \Leftrightarrow x^2=-4 \Leftrightarrow x=\sqrt{-4} \Rightarrow \text{no tiene solución real}$$

III) **<u>FUNCIÓN RADICAL</u>**: $f(x=\sqrt[n]{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} n \;\; par \;\; \Rightarrow \; Dom(f)=\{x\in Dom(g) / g(x)\geq 0\} \\ n \;\; impar \;\; \Rightarrow \; Dom(f)=Dom(g)\end{cases}$

<u>Ejemplos</u>

a) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ función radical $\Rightarrow Dom(f)=\{x\in\Re / x^2-1\geq 0\}=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

Tenemos que resolver la inecuación: $x^2-1\geq 0$

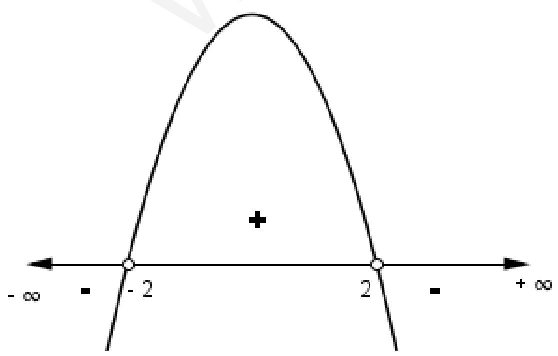


<u>Ceros</u>

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x=-1$ ò $x=1$

b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{4-x^2}}$ función radical $\Rightarrow Dom(f)=\{x\in\Re / 4-x^2>0\}=(-2,2)$

Tenemos que resolver la inecuación: $4-x^2>0$



<u>Ceros</u>

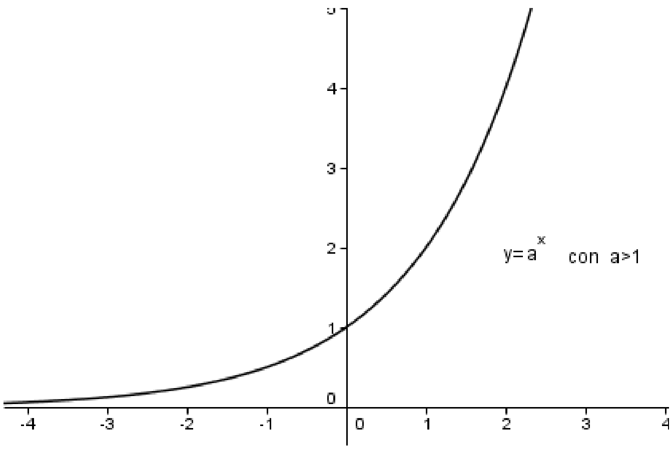
$4-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x=-2$ ò $x=2$

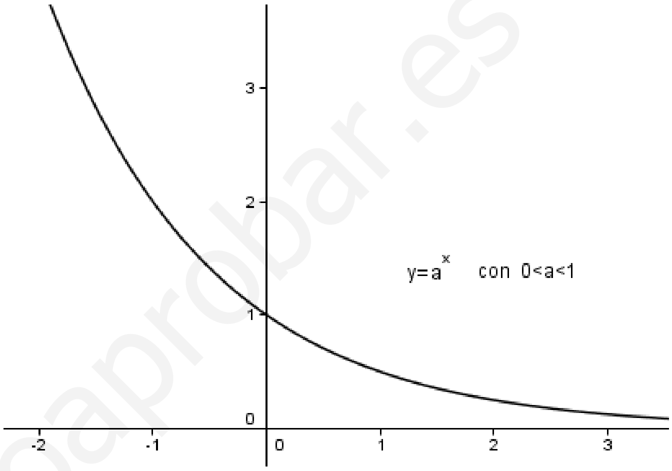
c) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-5x+1}$ función radical $\Rightarrow Dom(f)=Dom(y=x^2-5x+1)=\Re$

d) $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{1}{x+2}}$ función radical $\Rightarrow Dom(f)=Dom\left(y=\dfrac{1}{x+2}\right)=\Re-\{-2\}$

IV) <u>FUNCIÓN EXPONENCIAL</u>

1) $f(x)=a^x \quad con \quad a>0,\ a\neq 1 \Rightarrow\ Dom(f)=\Re$





2) $f(x)=a^{g(x)} \quad con \quad a>0,\ a\neq 1 \Rightarrow\ Dom(f)=Dom(g)$

<u>Ejemplos</u>

a) $f(x)=2^{\sqrt{x-3}} \quad \Rightarrow Dom(f)=Dom(y=\sqrt{x-3}))=\{x\in\Re\,/\,x-3\geq 0\}=[3,+\infty)$

b) $f(x)=e^{\frac{2}{x^2-3x}} \quad \Rightarrow Dom(f)=Dom\left(y=\dfrac{2}{x^2-3x}\right)=\Re-\{x\in\Re\,/\,x^2-3x=0\}=\Re-\{0,3\}$

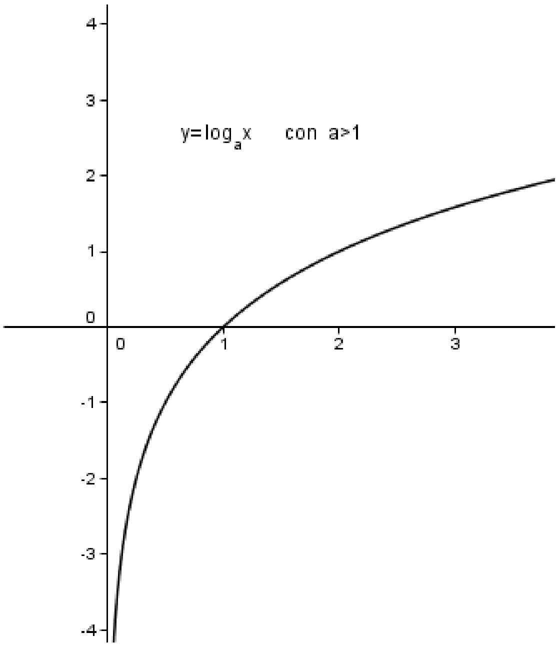
$$x^2-3x=0 \Leftrightarrow x\cdot(x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-3=0\Rightarrow x=3 \end{cases}$$

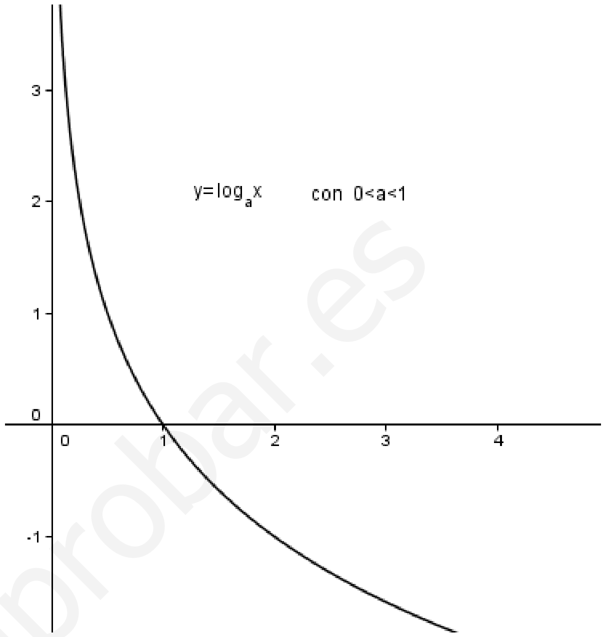
c) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2}{x^2+1}} \quad \Rightarrow Dom(f)=Dom\left(y=\dfrac{2}{x^2+1}\right)=\Re-\{x\in\Re\,/\,x^2+1=0\}=\Re$

$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1 \Rightarrow$ No tiene solución real

V) FUNCIÓN LOGARÍTMICA

1) $f(x)=\log_a x \quad con \quad a>0,\ a\neq 1 \Rightarrow Dom(f)=(0,+\infty)$





2) $f(x)=\log_a[g(x)] \quad con \quad a>0,\ a\neq 1 \Rightarrow Dom(f)=\{x\in Dom(g)\,/\,g(x)>0\}$

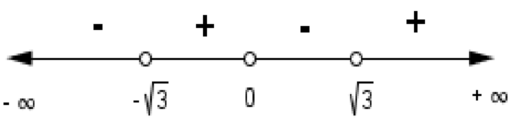
Ejemplos

a) $f(x)=\log_2(2x+1) \Rightarrow Dom(f)=\{x\in\Re\,/\,2x+1>0\}=\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

$$2x+1>0 \Leftrightarrow 2x>-1 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$$

b) $f(x)=\ln(x^3-3x) \Rightarrow Dom(f)=\{x\in\Re\,/\,x^3-3x>0\}=(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$

$$x^3-3x>0 \Leftrightarrow x\cdot(x-\sqrt{3})\cdot(x+\sqrt{3})>0 \Leftrightarrow x\in(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$$



Ceros

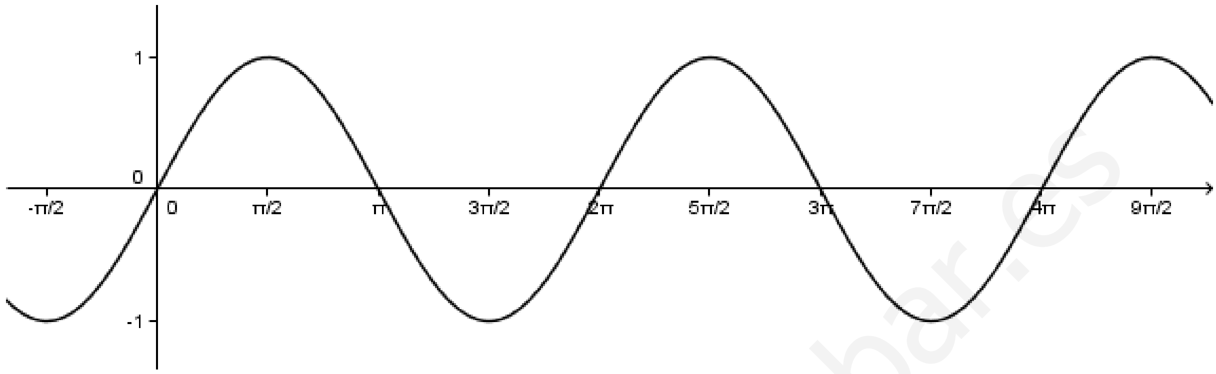
$$x^3-3x=0 \Leftrightarrow x\cdot(x^2-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

VI) FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

FUNCIÓN SENO

a) $f(x) = sen\, x \Rightarrow Dom(f) = \Re$

Periodo $\rightarrow T = 2\pi$



b) $f(x) = sen[g(x)] \Rightarrow Dom(f) = Dom(g)$

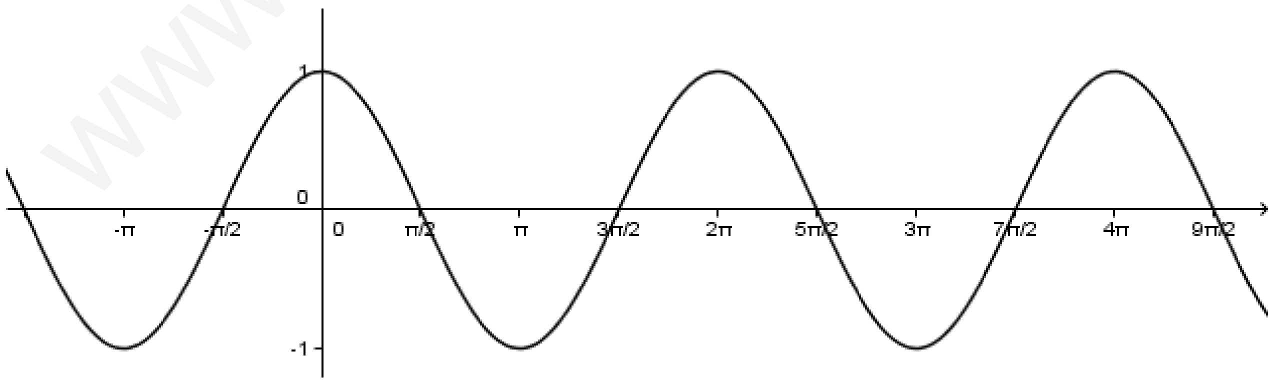
Ejemplo

$$f(x) = sen\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right) \Rightarrow Dom(f) = Dom\left(y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}\right) = \{x \in \Re \,/\, x-2>0\} = (2,+\infty)$$

FUNCIÓN COSENO

a) $f(x) = \cos x \Rightarrow Dom(f) = \Re$

Periodo $\rightarrow T = 2\pi$



b) $f(x) = \cos[g(x)] \Rightarrow Dom(f) = Dom(g)$

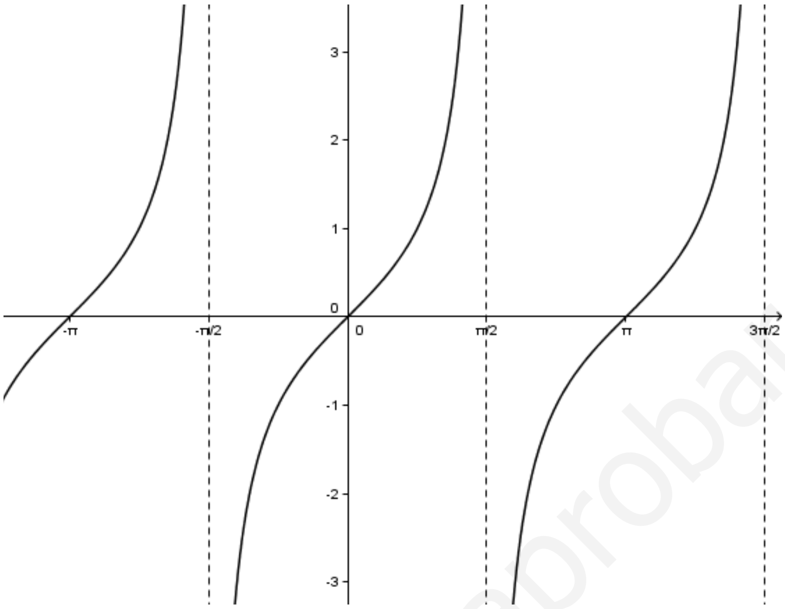
Ejemplo

$$f(x) = \cos(\ln x) \Rightarrow Dom(f) = Dom(y = \ln x) = (0,+\infty)$$

FUNCIÓN TANGENTE

$$f(x) = tg\ x \Rightarrow Dom(f) = \{x \in \Re / \cos x = 0\} = \Re - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2};\, k \in \mathrm{Z}\right\}$$

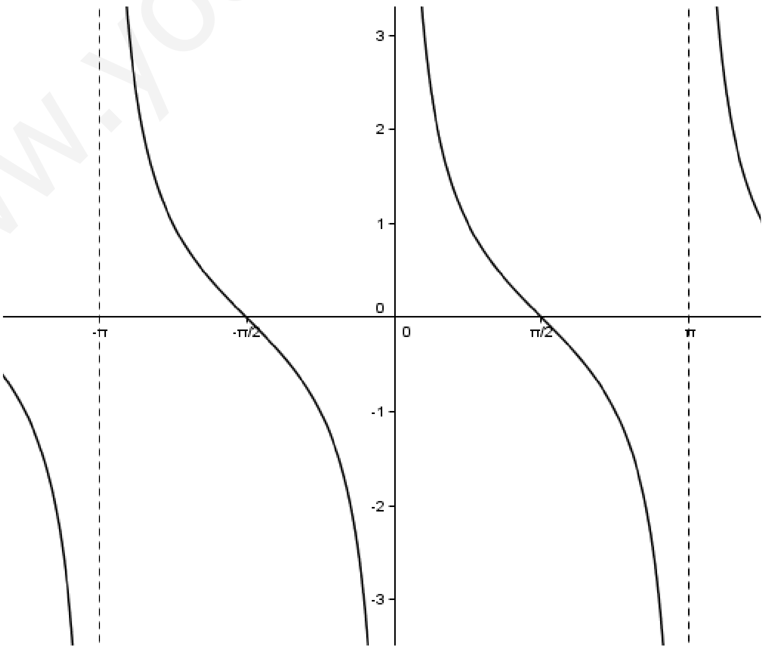
Periodo $\rightarrow T = \pi$



FUNCIÓN COTANGENTE

$$f(x) = \text{cotg}\ x \Rightarrow Dom(f) = \{x \in \Re / sen\ x = 0\} = \Re - \{k\pi;\, k \in \mathrm{Z}\}$$

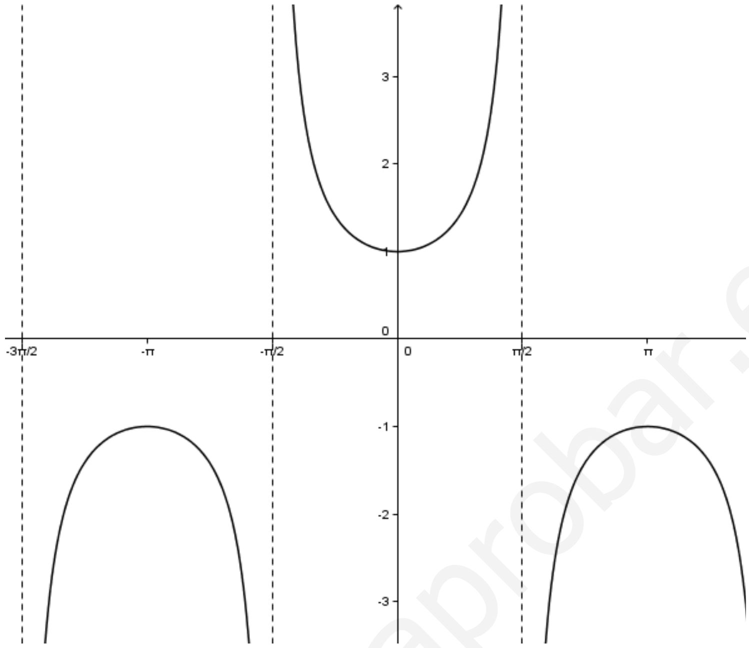
Periodo $\rightarrow T = \pi$



FUNCIÓN SECANTE

$$f(x) = \sec x \;\Rightarrow\; Dom(f) = \{x \in \Re \,/\, \cos x = 0\} = \Re - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2};\, k \in \mathrm{Z}\right\}$$

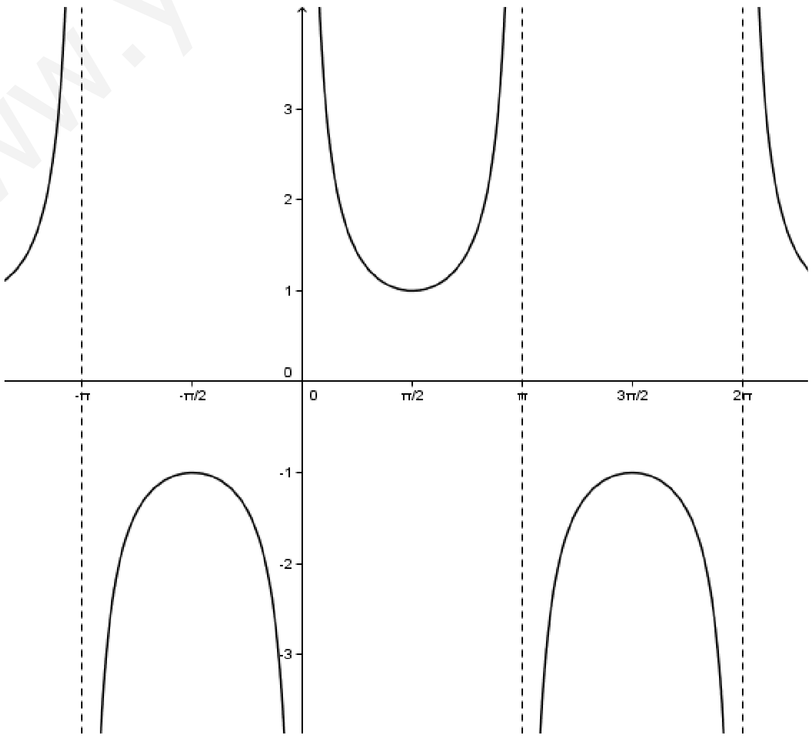
Periodo $\rightarrow T = 2\pi$



FUNCIÓN COSECANTE

$$f(x) = \text{cosec}\, x \;\Rightarrow\; Dom(f) = \{x \in \Re \,/\, sen\; x = 0\} = \Re - \{k\pi;\, k \in \mathrm{Z}\}$$

Periodo $\rightarrow T = 2\pi$



VII) COCIENTE DE FUNCIONES NO POLINÓMICAS: $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$

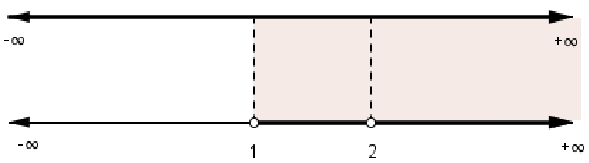
$$Dom(f)=[Dom(g)\cap Dom(h)]-\{x\in Dom(h)\,/\,h(x)=0\}$$

(Valores de *x* en los que *g* y *h* están definidas a la vez excepto aquellos en los que *h* se anula)

Ejemplos

a) $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x-1)}$

- $y=x \rightarrow \text{Dominio}=\Re$
- $y=\ln(x-1) \rightarrow \text{Dominio}=\{x\in\Re\,/\,x-1>0\}=\{x\in\Re\,/\,x>1\}=(1,+\infty)$
- $\ln(x-1)=0 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$



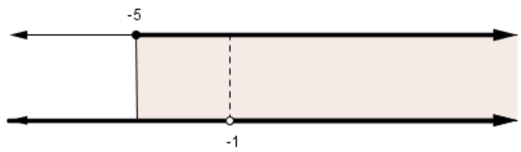
Por tanto, $Dom(f)=(1,2)\cap(2,+\infty)$

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+10}}{e^{x+1}-1}$

- $y=\sqrt{2x+10} \rightarrow \text{Dominio}=\{x\in\Re\,/\,2x+10\geq 0\}=[-5,+\infty)$

  $2x+10\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq -10 \Leftrightarrow x\geq -5 \Leftrightarrow x\in[-5,+\infty)$
- $y=e^{x+1}-1 \rightarrow \text{Dominio}=\Re$
- $e^{x+1}-1=0 \Leftrightarrow e^{x+1}=1 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Por tanto, $Dom(f)=[-5,-1)\cup(-1,+\infty)$



VIII) FUNCIONES DEL TIPO: $y=f(x)^{g(x)}$

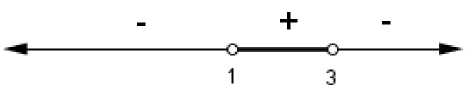
$\text{Dominio}=\{x\in Dom(f)\,/\,f(x)>0\}\cap Dom(g)$

(Valores de *x* en los que $f(x)>0$ y f y g están definidas a la vez)

Ejemplos

a) $f(x)=\left(\dfrac{3-x}{5x-5}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

➢ $\dfrac{3-x}{5x-5} > 0 \rightarrow x \in (1,3)$



Ceros

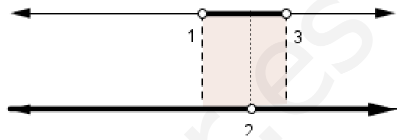
$3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$

Polos

$5x - 5 = 0 \Rightarrow x = 1$

➢ $y = \dfrac{1}{x-2} \rightarrow \text{Dominio} = \Re - \{2\}$

Por tanto, $Dom(f) = (1,3) \cap (\Re - \{2\}) = (1,2) \cup (2,3)$



IX) FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Se estudian las funciones parciales en cada uno de los subintervalos en los que están definidas.

Ejemplo

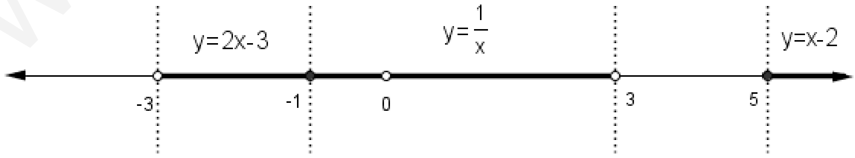
a) $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & si \quad -3 < x \leq -1 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad -1 < x < 3 \\ x-2 & si \quad x \geq 5 \end{cases}$

Primero estudiamos el dominio de cada una de las funciones parciales

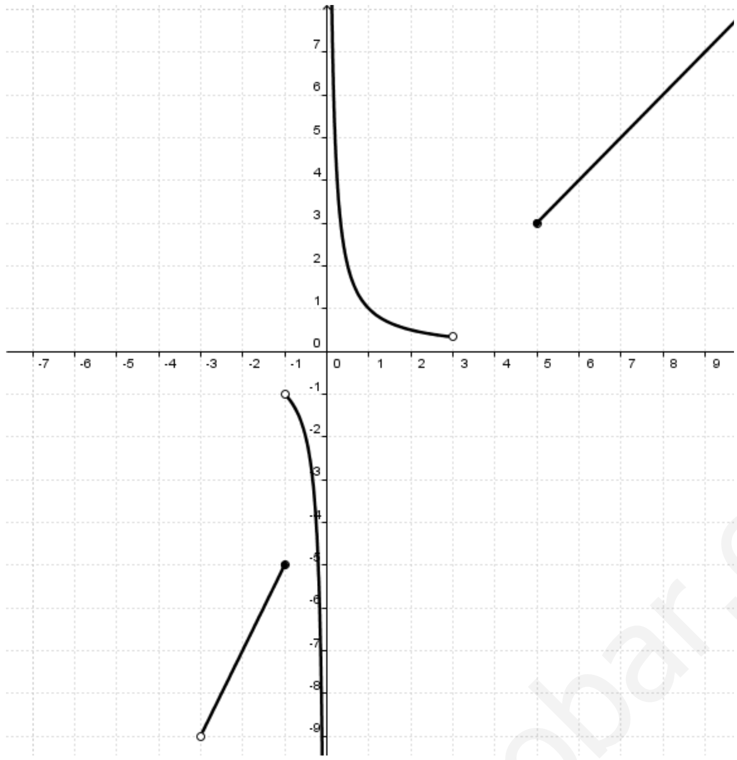
➢ $y = 2x - 3 \rightarrow \text{Dominio} = \Re \quad \Rightarrow (-3,-1] \in Dom(f)$

➢ $y = \dfrac{1}{x} \rightarrow \text{Dominio} = \Re - \{0\} \quad \Rightarrow (-1,0) \cup (0,3) \in Dom(f)$

➢ $y = x - 2 \rightarrow \text{Dominio} = \Re \quad \Rightarrow [5,+\infty) \in Dom(f)$



Por tanto, $Dom(f) = (-3,0) \cup (0,3) \cup [5,+\infty)$



b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2-2x} & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{1}{\ln(x-1)} & si \quad 1<x<6 \\ x-2 & si \quad x\ge 6 \end{cases}$

Primero estudiamos el dominio de cada una de las funciones parciales

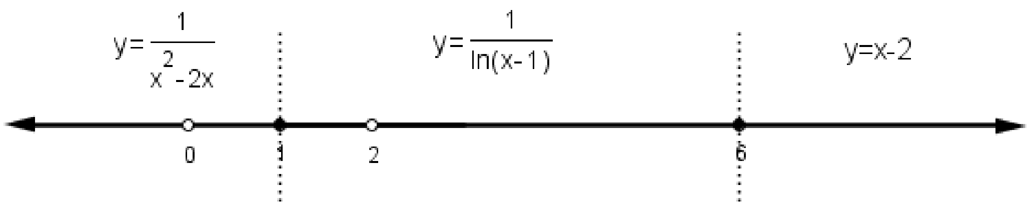
- $y=\dfrac{1}{x^2-2x} \to \text{Dominio}=\Re-\{x\in\Re\,/\,x^2-2x=0\}=\Re-\{0,2\} \quad \Rightarrow (-\infty,0)\cup(0,1]\in Dom(f)$

  $x^2-2x=0 \Leftrightarrow x\cdot(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \quad$ ò $\quad x=2$

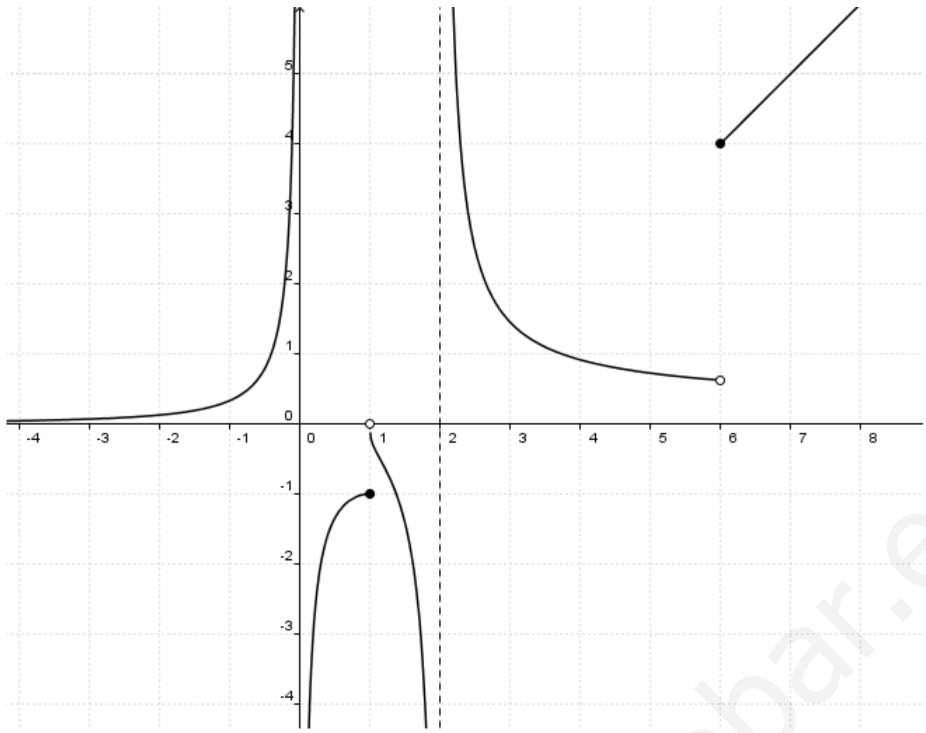
- $y=\dfrac{1}{\ln(x-1)} \to \text{Dominio}=\{x\in\Re\,/\,x-1>0\}-\{x\,/\,\ln(x-1)=0\}=(1,+\infty)-\{2\}=(1,2)\cup(2,+\infty)\Rightarrow$

  $\Rightarrow (1,2)\cup(2,6)\in Dom(f)$

- $y=x-2 \to \text{Dominio}=\Re \quad \Rightarrow [6,+\infty)\in Dom(f)$



Por tanto, $Dom(f)=\Re-\{0,2\}$



5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

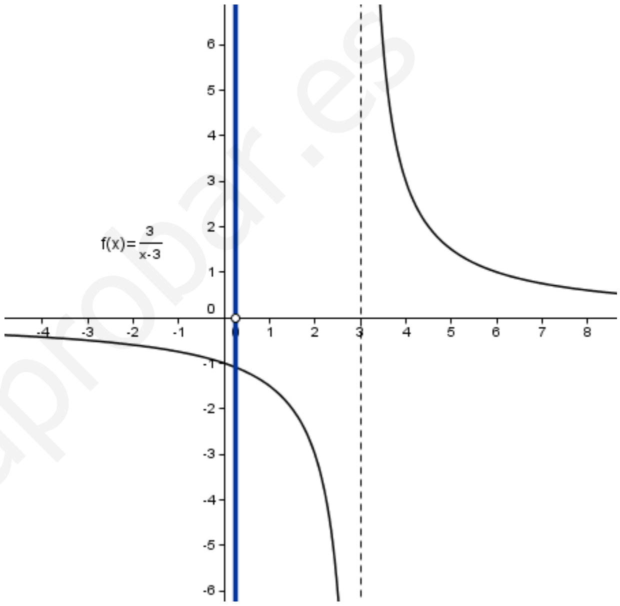
2. RECORRIDO

Recorrido de *f*(*x*) es el conjunto de valores que toma la variable dependiente "*y*", es decir, el conjunto de números reales que son imagen de algún elemento del dominio de *f*(*x*). Se denota por *Rec*(*f*).

$$\mathrm{Re}\,c(f)=\{y\in\Re\,/\,\exists\, x\in Dom(f)\ \ con\ \ f(x)=y\}$$

OBTENCIÓN DEL RECORRIDO DE DEFINICIÓN A PARTIR DE LA GRÁFICA

Para calcular el recorrido de una función, se representa gráficamente y luego se estudia sobre el eje de ordenadas.
Procedemos igual que en el dominio, pero ahora proyectamos sobre el eje de ordenadas.
En la gráfica de la derecha $\mathrm{Rec}(f)=\Re-\{0\}$.



OBTENCIÓN DEL RECORRIDO DE DEFINICIÓN A PARTIR DE LA EXPRESIÓN ANALÍTICA

Para calcular el recorrido de una función expresada en forma analítica, $y=f(x)$, se debe encontrar una expresión en la que se puedan obtener los valores de la variable "*x*" en función de los valores de la variable "*y*". Esta expresión no siempre es una función, como veremos más adelante, pero su dominio constituye el recorrido de $f(x)$.

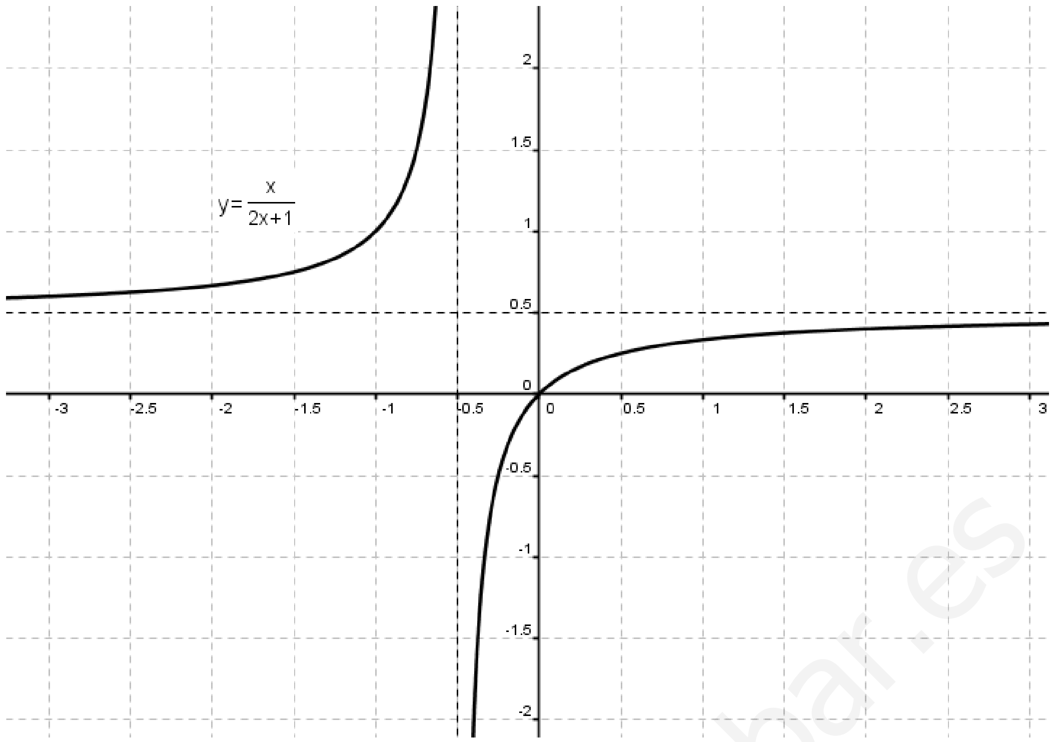
Ejemplo: Calcular el recorrido de la función $y=\dfrac{x}{2x+1}$.

Hay que obtener "*x*" en función de su imagen "*y*", y determinar el dominio de esta expresión.

$$y=\frac{x}{2x+1}\Rightarrow y\cdot(2x+1)=x\Rightarrow 2xy+y=x\Rightarrow 2xy-x=-y\Rightarrow x\cdot(2y-1)=-y\Rightarrow x=\frac{-y}{2y-1}$$

$$x=f^{-1}(y)\ \text{ existe}\Leftrightarrow 2y-1\neq 0\Leftrightarrow y\neq\frac{1}{2}$$

Por tanto, $\mathrm{Re}\,c(f)=\Re-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$


y= x/(2x+1)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3