EXAMEN DERIVADAS 2

1.- Utilizando la definición, calcula la función derivada de la función $f(x) = x^2 - 5x + 7$ ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en x = -1?(1 punto)

2.- Dibuja una función que tenga derivada nula en $x = -1$ y $x = 1$, derivada negativa en el intervalo $(-1,1)$ y positiva para cualquier otro valor de x. (1 punto)

3.- Halla las derivadas de las siguientes funciones: (3 puntos)

a) $y = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 2}{5x}$

b) $y = \sqrt{\cos x - \operatorname{sen} x}$

c) $y = \ln\left[\dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}\right]$

d) $y = (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x+1}$

4.- Halla razonadamente un punto de la función $y = x^2 + x + 1$ en el que la recta tangente sea paralela a la recta de ecuación $y = 3x + 7$. Halla también la ecuación de dicha recta tangente. (1,5 puntos)

5.- Encuentra los valores de a y b para los que la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x} & \text{si } x \le -1 \\ \dfrac{x^2 - b}{2} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

es continua y derivable en R. (2 puntos)

6.- Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Halla a, b, c y d sabiendo que tiene extremos relativos en (0,6) y (-2,10). (1,5 puntos)

SOLUCIONES

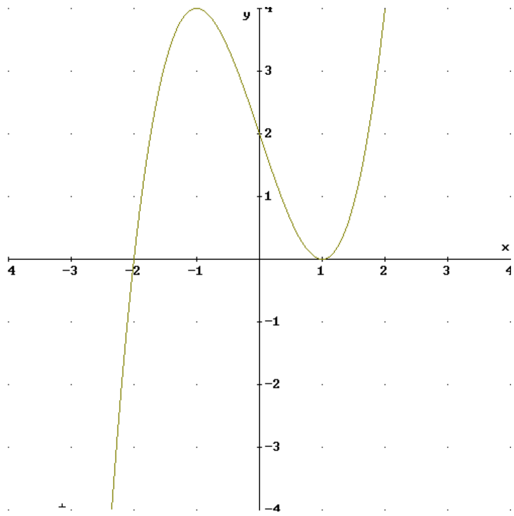
1.- $f(x)=x^2-5x+7$ La función derivada es $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, de donde:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-5(x+h)+7-(x^2-5x+7)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+h^2+2xh-5x-5h-x^2+5x-7}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh-5h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2x-5)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2x-5)=2x-5$$

La pendiente de la tangente en x=-1 será $f'(-1)=2\cdot(-1)-5=-7$

2.- Una función que cumpla las características pedidas, tendrá que ser decreciente (derivada negativa) en el intervalo (-1,1) y creciente en el resto. Por lo tanto, tendrá un máximo en –1 y un mínimo en 1, por ejemplo la gráfica de la derecha cumple las condiciones.



3.- a) $y=\frac{2x^3-3x^2+2}{5x}$ $y'=\frac{(6x^2-6x)\cdot 5x-(2x^3-3x^2+2)\cdot 5}{(5x)^2}=$

$$=\frac{30x^3-30x^2-10x^3+15x^2-10}{25x^2}=\frac{20x^3-15x^2-10}{25x^2}=\frac{4x^3-3x^2-2}{5x^2}$$

b) $y=\sqrt{\cos x-\operatorname{sen} x}$ $y'=\frac{1}{2\sqrt{\cos x-\operatorname{sen} x}}\cdot(-\operatorname{sen} x-\cos x)=-\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{2\sqrt{\cos x-\operatorname{sen} x}}$

c) $y=\ln\left[\frac{x^2-3}{x^2+3}\right]$ $y'=\frac{1}{\frac{x^2-3}{x^2+3}}\cdot\frac{2x\cdot(x^2+3)-(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{6x+6x}{\frac{x^2-3}{x^2+3}\cdot(x^2+3)^2}$

$$y'=\frac{12x}{(x^2-3)(x^2+3)}=\frac{12x}{x^4-9}$$

d) $y=(x^2+3x)\cdot e^{-2x+1}\rightarrow y'=(2x+3)\cdot e^{-2x+1}+(x^2+3x)\cdot e^{-2x+1}\cdot(-2)$

$$y'=(2x+3)\cdot e^{-2x+1}+(-2x^2-6x)\cdot e^{-2x+1}=e^{-2x+1}(-2x^2-4x+3)$$

4.- $y = x^2 + x + 1$ tangente paralela a $y = 3x + 7$, esto significa que tiene la misma pendiente, que es 3 (coeficiente de la x).
Luego, hallaremos la derivada e igualaremos a 3:
$y' = 2x + 1 = 3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$, luego la recta tangente es en el punto de abscisa 1, hallemos la ordenada: $y = 1^2 + 1 + 1 = 3$
Ecuación de la recta tangente: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
$y = 3(x-1) + 3 \Rightarrow y = 3x - 3 + 3 \Rightarrow y = 3x$

5.- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x} & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{x^2 - b}{2} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

$\dfrac{a}{x}$ es continua y derivable en $R - \{0\} \Rightarrow$ continua y derivable en $(-\infty, -1)$

$\dfrac{x^2 - b}{2}$ función polinómica, continua y derivable en R$\Rightarrow$ continua y derivable en $(-1, \infty)$, luego habrá que ver qué pasa en el punto –1:

$$f(-1) = -a$$

continuidad en –1: $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{a}{x} = -a \qquad \Rightarrow -a = \dfrac{1-b}{2} \Rightarrow b = 1 + 2a$ (*)

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - b}{2} = \frac{1-b}{2}$$

Derivabilidad en –1:

$f'(-1^-) \to y = \dfrac{a}{x} \to y' = -\dfrac{a}{x^2} \Rightarrow f'(-1^-) = -\dfrac{a}{(-1)^2} = -a$

$f'(-1^+) \to y = \dfrac{x^2 - b}{2} \to y' = \dfrac{2x}{2} = x \Rightarrow f'(-1^+) = -1 \qquad \Rightarrow a = 1$

(*) $b = 1 + 2a \Rightarrow b = 3$

Luego, la función es continua y derivable en su dominio para $a = 1 \quad b = 3$

6.- $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \to f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

pasa por los puntos (-2, 10) y (0,6)$\to \begin{cases} f(0) = 6 \to d = 6 \\ f(-2) = 10 \to -8a + 4b - 2c + 6 = 10 \end{cases}$

extremos relativos en –2 y 0 $\to \begin{cases} f'(0) = 0 \to c = 0 \\ f'(-2) = 0 \to 12a - 4b + c = 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} -8a + 4b = 4 \\ 12a - 4b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4a = 4 \to a = 1 \Rightarrow -8 + 4b = 4 \Rightarrow 4b = 12 \Rightarrow b = 3$

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 6$