APUNTES DE MATEMÁTICAS

TEMA 6:CÓNICAS

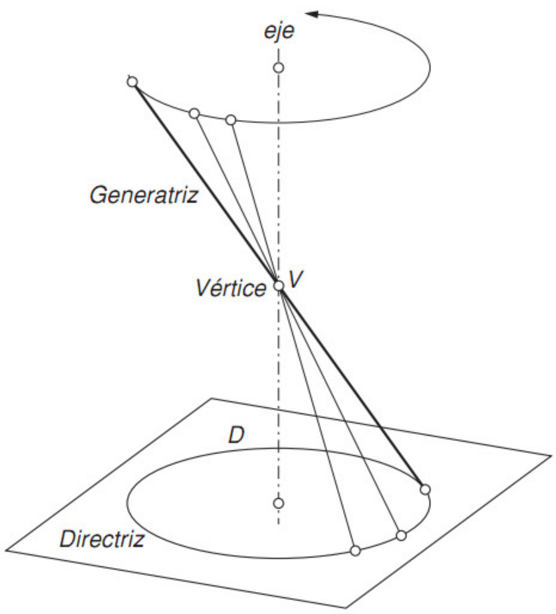
1º BACHILLERATO

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Superficie Cónica

Se llama superficie cónica de revolución a la superficie engendrada por una línea recta que gira alrededor de un eje manteniendo un punto fijo sobre dicho eje



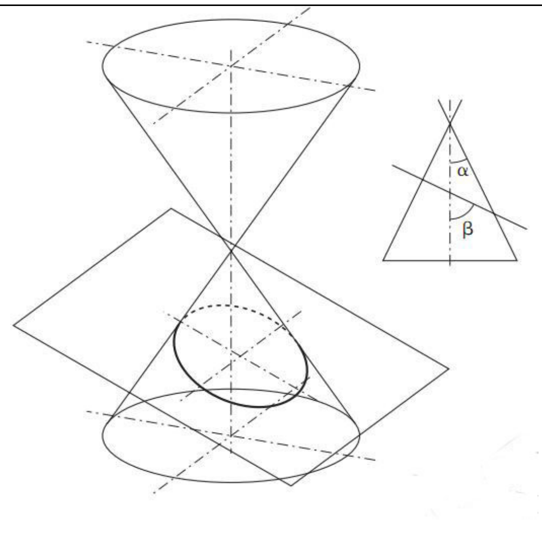
Apolonio de Perge o Apolonio de Perga (Perge, c. 262 - Alejandría, c. 190 a. C.) fue un geómetra griego famoso por su obra Sobre las secciones cónicas. Fue Apolonio quien dio el nombre de elipse, parábola e hipérbola, a las figuras que conocemos.

También se le atribuye la hipótesis de las órbitas excéntricas o teoría de los epiciclos para intentar explicar el movimiento aparente de los planetas y de la velocidad variable de la Luna.

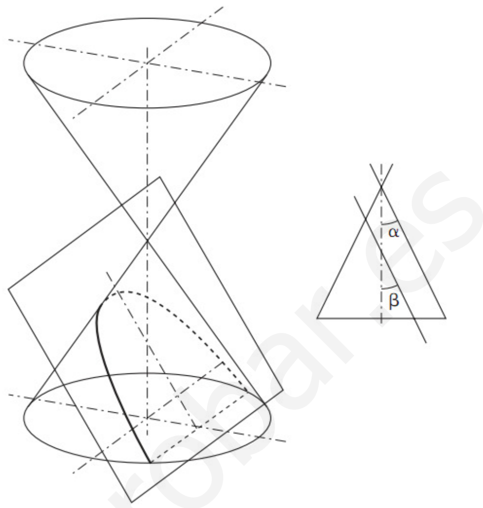
Sus extensos trabajos sobre geometría tratan de las secciones cónicas y de las curvas planas y la cuadratura de sus áreas. Recopiló su obra en ocho libros y fue conocido con el sobrenombre de El Gran Geómetra.

1.2. CURVAS CÓNICAS

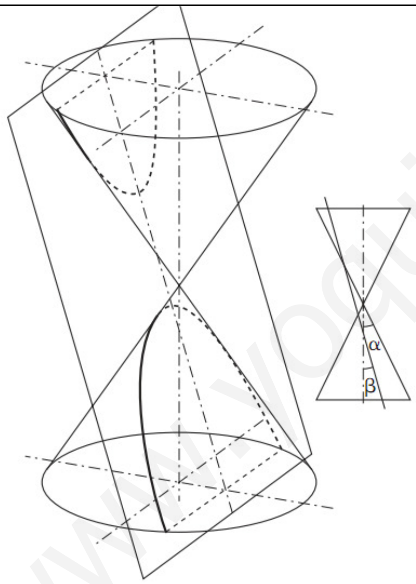
Las curvas cónicas se obtienen al intersecar una superficie cónica con un plano. La posición de ese plano posibilita la obtención de diferentes curvas cónicas



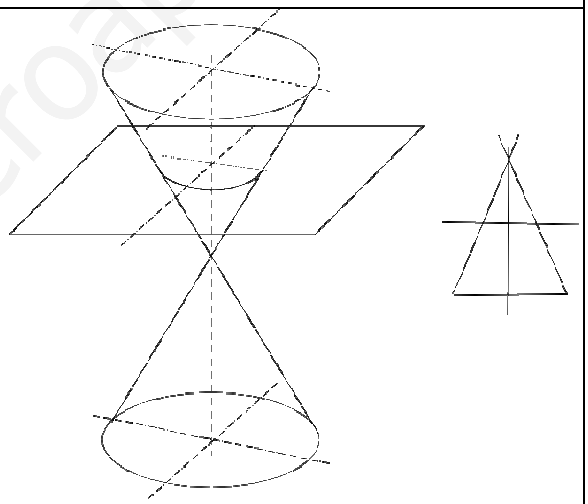
Elipse



Parábola



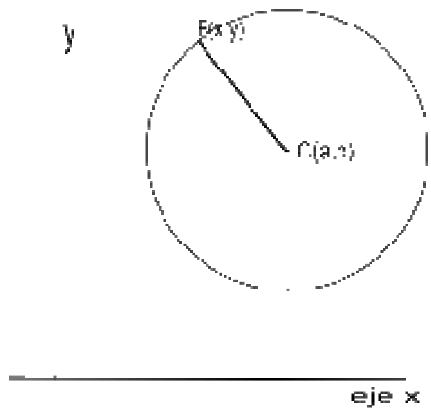
Hipérbola



Circunferencia

2. CIRCUNFERENCIA

Se llama circunferencia al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro C . El radio de la circunferencia es la distancia de un punto cualquiera de dicha circunferencia al centro



Condición de lugar geométrico :

d(P,C)=r

Ecuación de la circunferencia :

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

2.1. Ecuación Completa de una Circunferencia

Si desarrollamos la ecuación anterior

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \rightarrow x^2+a^2-2ax+y^2+b^2-2by=r^2$$

Si realizamos los siguientes cambios

$A=-2a$ $\qquad$ $B=-2b$ $\qquad$ $C=a^2+b^2-r^2$

Obtenemos otra forma de escribir la ecuación de la cfa:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

Donde el centro es: $C=\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ y el radio cumple la relación: $r^2=\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-C$

2.1.1. Ecuación reducida de la circunferencia

Si el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas la ecuación queda reducida a:

$$x^2+y^2=r^2$$

2.1.2. Ejemplo

Escribir la ecuación de la circunferencia de centro (3, 4) y radio 2.

$$(x-3)^2+(y-4)^2=2^2 \rightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=4 \rightarrow$$

$$x^2-6x+9+y^2+16-8y=4 \rightarrow x^2+y^2-6x-8y+21=0$$

2.1.3. Ejemplo 2

Dada la circunferencia de ecuación ***x*² + *y*² - 2*x* + 4*y* - 4 = 0**, hallar el centro y el radio.

$$a=\frac{-A}{2}=\frac{-(-2)}{2}=1$$

$$b=\frac{-B}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$r^2=a^2+b^2-C=4+16-4=16 \Rightarrow r=4$$

2.1.4. Ejemplo

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(2,0), B(2,3), C(1, 3).

Si sustituimos x e y en la ecuación $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ por las coordenadas de los puntos se obtiene el sistema:

$$\begin{array}{l} 4+0+2A+0+C=0 \\ 4+9+2A+3B+C=0 \\ 1+9+A+3B+C=0 \end{array} \qquad A=-3 \qquad B=-3 \qquad C=2$$

SOL: $x^2+y^2-3x-3y+2=0$

2.1.5. Condición para que un polinomio de grado 2 en x,y sea circunferencia

Para que una expresión del tipo: $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ sea una circunferencia debe cumplir que:

1. Los coeficientes de x^2 e y^2 sean iguales a la unidad. Si tuvieran ambos un mismo coeficiente distinto de 1, podríamos dividir por él todos los términos de la ecuación.

2. No tenga término en xy.

3. $\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-C>0$

2.1.6. Ejemplo

Indicar si la ecuación: $4x^2+4y^2-4x-8y-11=0$, corresponde a una circunferencia, y en caso afirmativo, calcular el centro y el radio.

1. Como los coeficientes de x^2 e y^2 son distintos a la unidad, dividimos por 4:

$$x^2+y^2-x-2y-\frac{11}{4}=0$$

2. No tiene término en xy.

3. $\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{-2}{2}\right)^2-\left(-\frac{11}{4}\right)>0$

Es una circunferencia, ya que se cumplen las tres condiciones.

$$-1=-2a \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$
$$-2=-2b \Rightarrow b=1$$
$$C=(\frac{1}{2},1)$$
$$\frac{-11}{2}=\frac{1}{4}+1-r^2 \Rightarrow r=2$$

2.2. POSICIÓN relativa de una recta y una circunferencia

Para hallar la posición relativa de una recta y una circunferencia podemos comparar la distancia del centro de la cfa a la recta.

Si d =d(C,recta) y r=radio de la cfa

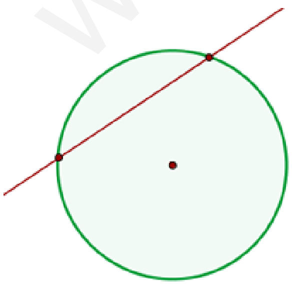
- Si d>r➔ La recta es exterior

b.- Si d=r➔ La recta es tangente

c.- Si d<r➔ La recta es secante

Para hallar los puntos comunes a una cónica y una recta resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de ambas.

En general se obtiene un ecuación de segundo grado, que tendrá dependiendo del signo del discrimínante, $\Delta=b^2-4ac$, las siguientes soluciones:

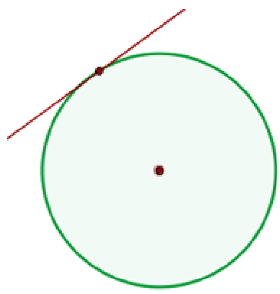


- Si Δ > 0

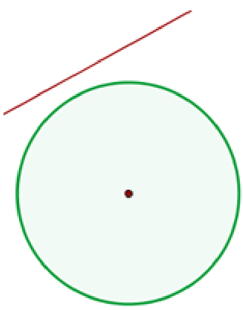
Dos soluciones: la recta y la cónica son secantes.

- Si Δ = 0

Una solución: la recta y la cónica son tangentes.



- Si Δ < 0



Ninguna solución: la recta y la cónica son exteriores.

2.2.1. EJEMPLO

Calcula la posición relativa de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ y la recta. $3x + y = 5$

Centro

$-2 = -2a \Rightarrow a = 1$

$b = 0$

$C = (1,0)$

$r^2 = 1^2 + 0 - (-3) = 4 \Rightarrow r = 2$

$d(C, recta) = \dfrac{|3(1) + 0 - 5|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \dfrac{2}{2} = 1$

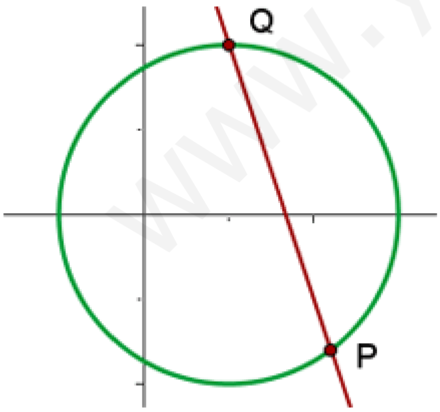
Como la distancia es mas corta que el radio➔ La recta es secante $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases}$

$y = 5 - 3x$

$x^2 + (5 - 3x)^2 - 2x - 3 = 0 \quad 5x^2 + 25 + 9x^2 - 30x - 2x - 3 = 0$ ➔

$x^2 + 25 + 9x^2 - 30x - 2x - 3 = 0$ ➔ $10x^2 - 32x - 22 = 0$ ➔ $5x^2 - 16x - 11 = 0$

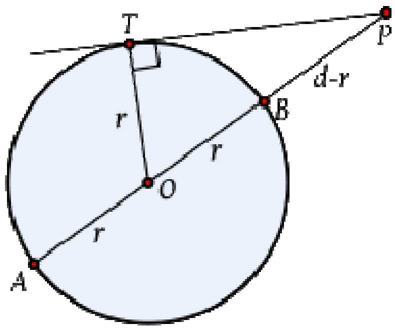
$$X = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 220}}{10} = \frac{16 \pm 6}{10} = \begin{cases} x = \dfrac{11}{5} \\ x = 1 \end{cases}$$



$P(\frac{11}{5}, -\frac{8}{5})$ $Q(1,2)$ Secantes

2.3. POTENCIA de un punto respecto a una circunferencia

La **potencia de un punto P respecto a una circunferencia** de radio r es el valor $\pi(P) = d^2 - r^2$ donde d es la distancia de P al centro del círculo.

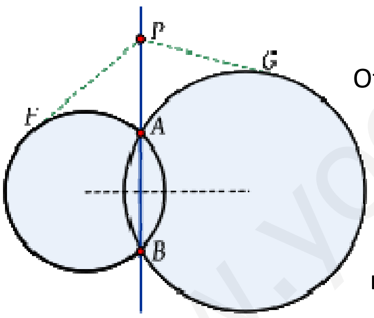


PA·PB = PT² = d²-r²

La definición algebraica permite adicionalmente el cálculo de la potencia de un punto mediante el uso de coordenadas. La potencia del punto P=(x,y) respecto a una circunferencia centrada en el origen, con radio arbitrario r es

$$\pi(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2})^2 - r^2 = x^2 + y^2 - r^2.$$

2.4. EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS



π(P) = PA·PB = PF² = PG²

Otro lugar geométrico que se puede considerar es aquel formado por los puntos cuya potencia respecto a dos círculos fijos (no concéntricos) es la misma. Es decir, aquellos puntos P tales que $d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$ donde d_1,d_2 son las distancias desde P a los centros del primer y segundo círculo, mientras que r_1,r_2 son los radios de los mismos.

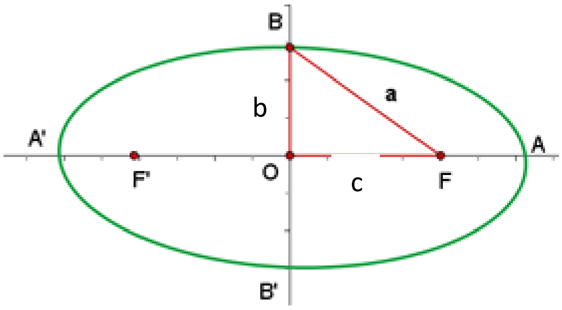
Este lugar geométrico es una línea recta, denominada eje radical de los dos círculos, perpendicular a la línea que une los centros de ambos. Los detalles varían dependiendo de la posición relativa de los círculos (si se cortan, si son ajenos o si uno contiene a otro).

El caso más sencillo, aquí ilustrado, es el que ambos círculos se cortan. Denominando por A,B a los puntos de corte, se observa que para cualquier punto de la línea AB se cumple que la potencia respecto a cualquiera de los dos círculos es la misma: PA·PB.

Como consecuencia adicional se obtiene como consecuencia que dicha recta también es el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se puede trazar tangentes de la misma longitud hacia cada uno de los círculos. Esto es porque la potencia del punto P también es igual a PF^2 y PG^2, por lo que PF=PG.

3. ELIPSE

a. Definiciones:



i. Sean F y F' dos puntos de un plano ($F \neq F'$. Se define la ELIPSE de focos F y F' como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a los focos es constante e igual a 2a (a > 0).y (a>c)

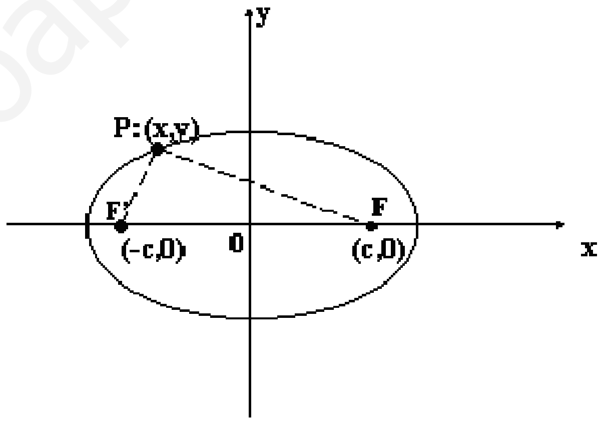
ii. Las rectas: La que pasa por los focos F y F' y la recta mediatriz del segmento FF' se llaman EJES DE SIMETRÍA DE LA ELIPSE.

iii. El punto de intersección O de los dos ejes de simetría, se llama CENTRO DE LA ELIPSE. Los puntos A', A, B y B' se llaman VERTICES DE LA ELIPSE.

Si el segmento AA' es mayor que el segmento BB' , ambos segmentos se llaman respectivamente EJE MAYOR y EJE MENOR de la elipse.

3.1.1. OBSERVACIONES:

i. De hecho, cualquier par de puntos del plano pueden servir como focos de una elipse. Por simplicidad, solo se considerarán inicialmente aquellos casos en los cuales los focos están en el mismo eje (eje x, eje y) y son simétricos uno del otro con respecto al origen



ii. Nótese también que como $\overline{FB} = \overline{F'B} = a$, se sigue que $\overline{B'O} = \overline{OB} = b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (teorema de Pitágoras).

3.2. Ecuaciones Analíticas de la Elipse

Caso 1. Elipses con focos. F'(-c, 0) y F(c, 0) ; c > 0

Eje mayor: Longitud 2a (2a > 0)

Eje menor: Longitud 2b (2b > 0)

3.2.1. TEOREMA:

La ecuación de la elipse con focos en los puntos F'(-c, 0) y F(c, 0), eje mayor 2a, y eje menor 2b, viene dada por: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ Nota (2a>2c)

Demostración

Si p(x, y) es un punto que pertenece a la elipse considerada, se tiene de acuerdo a la definición i que $FP + F'P = 2a$, equivalentemente, $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$ (fórmula de distancia entre dos puntos)

Transponiendo el primer radical al segundo lado y elevando ambos miembros al cuadrado, se obtiene: $x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$

Simplificando la última igualdad se llega a: $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$

Al elevar nuevamente ambos miembros al cuadrado en la última ecuación, se obtiene:

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

La cual se reduce a: $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2)$

Recordando además que $(a^2 = b^2 + c^2 ==> a^2 - c^2 = b^2$ y al dividir ambos miembros de la última igualdad por a^2b^2, se obtiene finalmente $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;que corresponde a la ecuación pedida.

Caso 2. Elipses con focos F'(0, -c) y F(0, c) ; c > 0

Eje mayor: Longitud 2a (a > 0)

Eje menor: Longitud 2b (b > 0)

3.3. TEOREMA:

La ecuación de la elipse con focos en los puntos F'(0, -c) y F(0, c), eje mayor 2a, y, eje menor 2b , (a>c) ,viene dada por:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Demostración:

Es similar a la anterior, se deja por lo tanto como ejercicio.

NOTA:Nótese que si en las ecuaciones (1) y (2) de la elipse, se hace a = b, las ecuaciones se transforman en la ecuación de una circunferencia de centro en el origen y radio a.

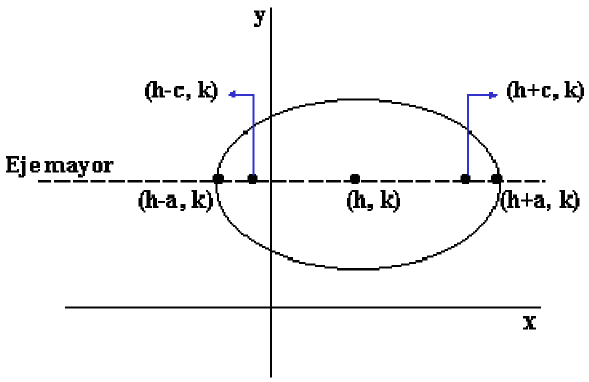
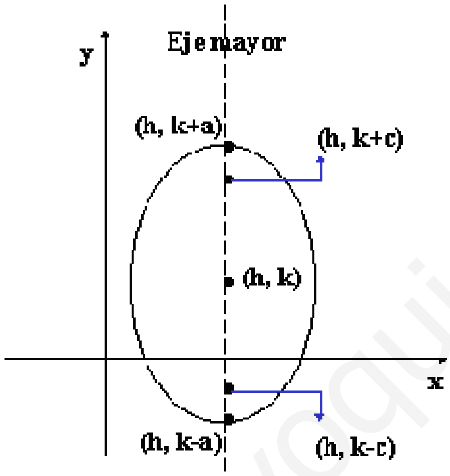
3.4. Caso 3. (Caso General).

Si en vez de considerar el centro de la elipse en el punto (0, 0), como se hizo en los dos casos anteriores, se considera el punto C (h, k), la ecuación de la elipse correspondiente, se transforma utilizando las ecuaciones de traslación (sección 6.1.2.) en:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Si a > b, el eje focal es paralelo al eje x. (sobre la recta y = k)

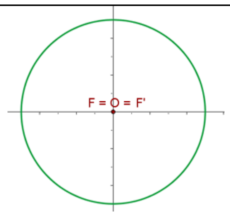
Si b > a, el eje focal es paralelo al eje y. (sobre la recta x = h)

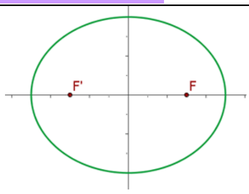
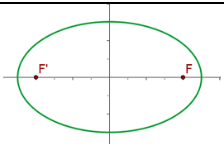
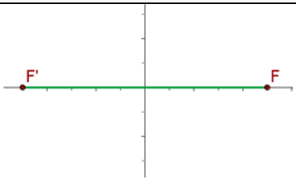
	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

3.5. Excentricidad de la elipse

SE llama excentricidad de la elipse al valor $e=\frac{c}{a}$; $\quad e=\frac{c}{a}$; $\quad 0 \le e=\frac{c}{a} \le 1$

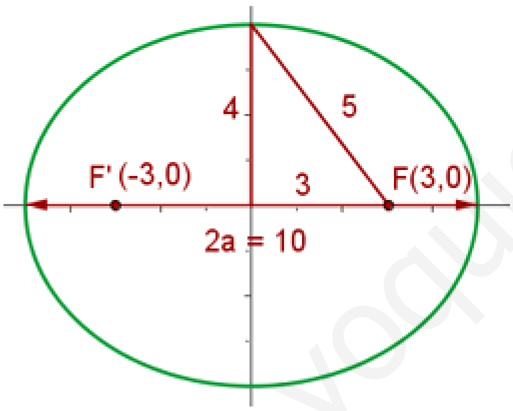
Al cociente entre su semidistancia focal y su semieje mayor.

	c=0 b=a e=0

	e=3/5
	e=4/5
	e=1 c=a

3.5.1. EJEMPLO

Hallar los elementos característicos y la ecuación reducida de la elipse de focos: F'(-3,0) y F(3, 0), y su eje mayor mide 10.



Semieje mayor➔2a=10➔a=5

Semidistancia focal➔FF'=2c=6➔ c=3

Semieje menor➔ $b^2 = 25 - 9$ ➔b=4

Ecuación reducida➔ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Excentricidad➔e=3/5

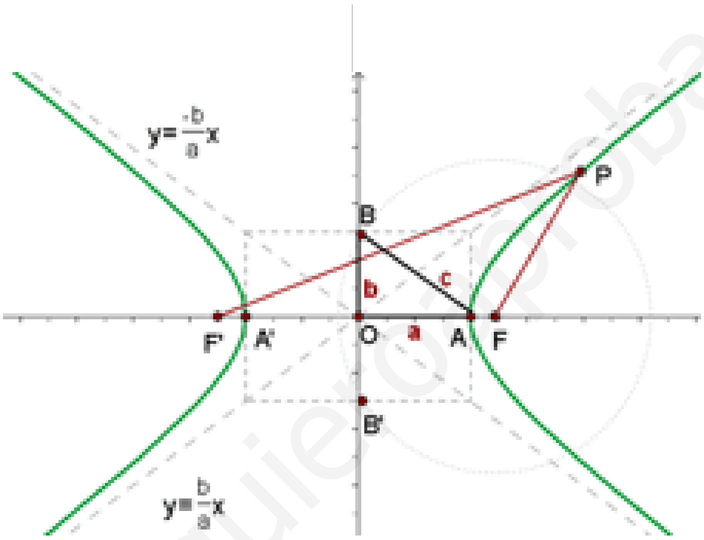
4. HIPÉRBOLA

4.1. Definiciones

i. Sean F y F' dos puntos de un plano (F≠F'). Se define la hipérbola de focos F y F' como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancia a los focos es constante e igual a 2a. (a > 0).

ii. Las rectas: La que pasa por los focos F y F' y la recta mediatriz del segmento F'F se llaman: Ejes de simetría de la hipérbola.

iii. El punto de intersección 0 de dos ejes de simetría, se llama CENTRO de la hipérbola. Los puntos A y A' se llaman: VERTICES de la hipérbola.



4.1.1. OBSERVACIONES:

i. Como en el caso de la elipse, cualquier par de puntos del plano pueden servir como focos de una hipérbola. Por simplicidad, solo se considerarán inicialmente, aquellos casos en los cuales los focos están en el mismo eje (eje x ó eje y) y son simétricos uno del otro con respecto al origen

ii. Si $\overline{F'P}-\overline{FP}=2a$ se obtiene la rama derecha de la hipérbola; mientras que si $\overline{FP}-\overline{F'P}=2a$ se obtiene la otra rama

iii. Note que 2a < 2c, ya que la diferencia de los lados de un triángulo siempre es menor que el tercer lado. Además, se toma. $\overline{OB}=b=\sqrt{c^2-a^2}$

Ecuaciones Analíticas de la Hipérbola

4.2. caso 1. Hipérbola con focos F’(-c, 0) y F(c, 0) ; c > 0.

4.2.1. TEOREMA:

La ecuación de la hipérbola centrada en el origen y cuyos focos están en los puntos F(-c, 0) y F(c, 0) viene dada por:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Demostración:

Si P(x, y) es un punto que pertenece a la hipérbola considerada, se tiene de acuerdo a la definición que:

$\overline{F'P}-\overline{FP}=2a$ ó $\overline{FP}-\overline{F'P}=2a$

De donde,

$\overline{F'P}=\overline{FP}+2a$ ó $-\overline{F'P}=2a-\overline{FP}$

Es decir, $\pm\overline{F'P}=2a\pm\overline{FP}$

Equivalentemente, usando la fórmula de distancia, se puede escribir:

$$\pm\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a\pm\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado en la última igualdad y simplificando se obtiene:

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevando nuevamente ambos miembros al cuadrado en la última igualdad y después de simplificar y factorizar se puede escribir:

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

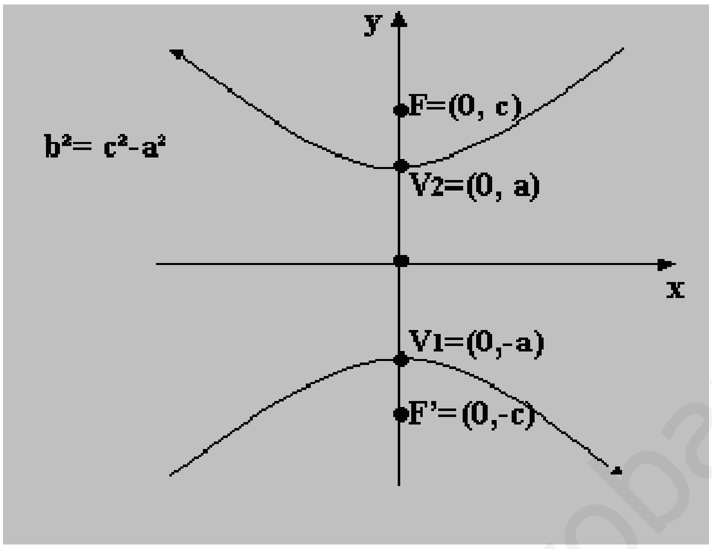
Recordando además que $c^2-a^2=b^2$ (observación iii.) y al dividir ambos miembros de la última igualdad por a^2b^2, se obtiene finalmente, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ que corresponde a la ecuación pedida.

4.3. Caso 2. Hipérbola con focos en F’(0, -c) y F(0, c) ; c > 0.

4.3.1. TEOREMA:

La ecuación de la hipérbola centrada en el origen y cuyos focos están en los puntos F’(0, -c) y F(0, c) viene dada por:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



La demostración es similar a la anterior, se deja por lo tanto como ejercicio.

4.4. Caso 3. (Caso General)

Si en vez de considerar el centro de la hipérbola en el punto (0, 0), como se hizo en los dos casos anteriores, se considera el punto C (h, k), las ecuaciones de la hipérbola correspondiente, se transformarán utilizando las ecuaciones de traslación (sección 6.1.2.) en:

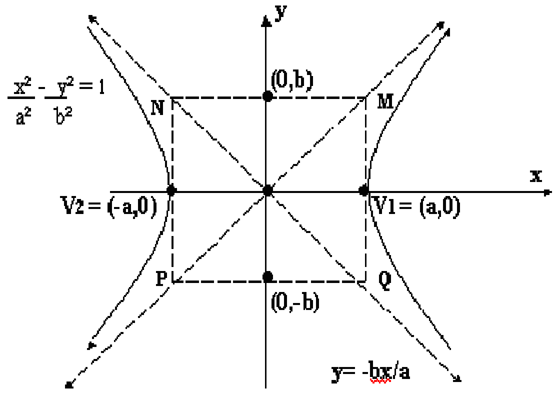
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (3) \qquad\qquad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

Según que el eje focal sea una recta paralela al eje x o al eje y respectivamente.

4.4.1. Observaciones:

i. En la figura ., se ha trazado la hipérbola centrada en el origen y focos en los puntos F1(c,0) y F2(-c, 0). Los puntos V1 y V2 son los vértices de la hipérbola y sus coordenadas son V1(a, 0) y V2(-a, 0). Los puntos M, N, P y Q tienen coordenadas: M (a, b), N(-a, b), P(-a, -b) y Q(a, -b).

El rectángulo MNPQ recibe el nombre de rectángulo auxiliar de la hipérbola.



ii. La gráfica de la hipérbola es simétrica con respecto al eje x y con respecto al eje y.

iii. Las rectas que pasan, la primera por M y P y la segunda por N y Q, se llaman asíntotas oblicuas de la hipérbola y sus ecuaciones vienen dadas respectivamente por:

$$\boldsymbol{y = \frac{b}{a}x} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{y = -\frac{b}{a}x}$$

Una forma "nemotécnica" de obtener las ecuaciones de las los asíntotas de la hipérbola es la siguiente: En la ecuación de la hipérbola, sustituir el 1 (uno) del segundo miembro por un 0 (cero).

Así, en el caso particular de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, Hacemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0 \text{ (factorizando)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{a}x \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x \end{array}\right\}$$

Estas son las ecuaciones de las asíntotas.

iv. En el caso particular, cuando a = b, las ecuaciones de la hipérbola se transforman en

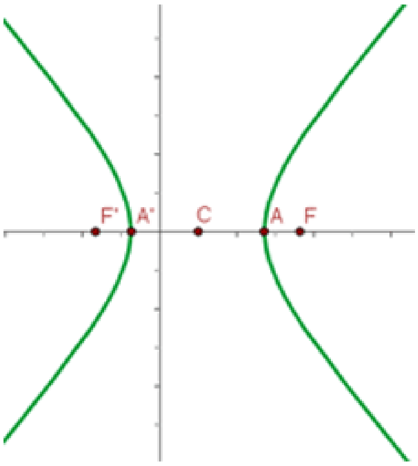
$$\boldsymbol{x^2 - y^2 = 1} \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{y^2 - x^2 = 1}$$

En ambos, la hipérbola se llama: Hipérbola Equilátera y tienen como asíntotas las rectas *y = x* e

y= -x

Ejercicios

Representa gráficamente y determina las coordenadas del centro, de los focos, de los vértices y la excentricidad de las siguientes hipérbolas:



$4x^2-3y^2-8x-8=0 \rightarrow 4(x^2-2x+1)-4-3y^2-8=0$

$\rightarrow 4(x-1)^2-3y^2=12$

$a^2=3 \quad a=\sqrt{3}$

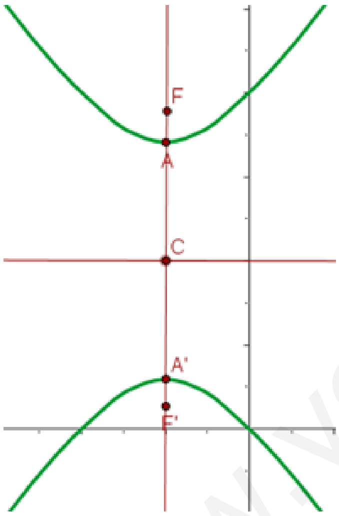
$b^2=4 \quad b=2$

$\rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}=1 \qquad \rightarrow c=\sqrt{3+4}=\sqrt{7}$

C=(1,0) A=($1+\sqrt{3}$,0) A'=($1-\sqrt{3}$,0) F= ($1+\sqrt{7}$,0)

F'(A=($1-\sqrt{7}$,0) $e=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

Ejemplo 2 $y^2-2x^2-4x-4y=0$



$(y^2-4y+4)-4-2(x^2+2x+1)+2=0$

$(y-2)^2-2(x+1)^2=2$

$\dfrac{(y-2)^2}{2}-(x+1)^2=1$

$a^2=2 \qquad a=\sqrt{2}$

$b^2=1 \qquad b=1$

$c=\sqrt{2+1} \qquad c=\sqrt{3}$

$C(-1,2)$

$A(-1,2+\sqrt{2}) \qquad A'(-1,2-\sqrt{2})$

$F(-1,2+\sqrt{3}) \qquad F'(-1,2-\sqrt{2})$

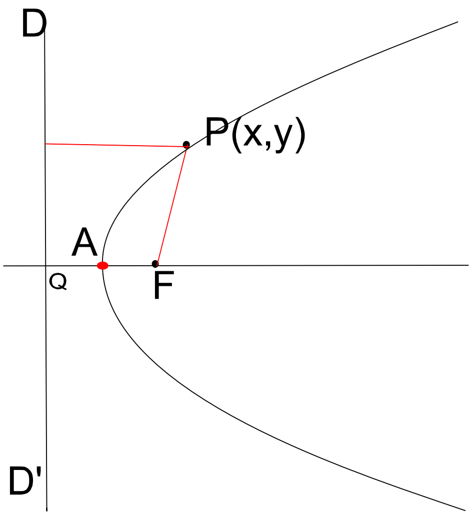
$e=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

5. LA PARABÓLA

5.1. Definiciones

- Sea DD una recta dada del plano y F un punto del plano que no está en la recta dada. Se define la parábola como el lugar geométrico de los puntos P del plano cuya distancia al punto F es igual a la distancia a la recta DD.

- La recta dada DD se llama **DIRECTRIZ** y el punto F se llama **FOCO** Frecuentemente se hace referencia a la parábola de directriz DD y de foco F



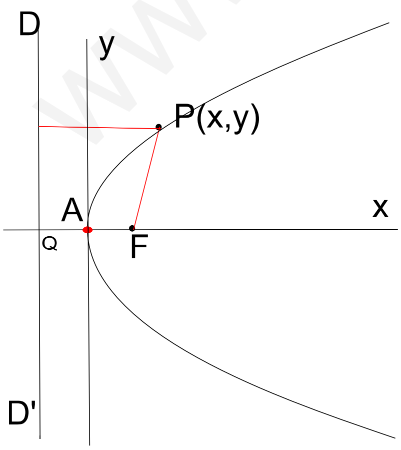
- Foco:Es el punto fijo F.
- Directriz: Es la recta fija d.
- Parámetro:Es la distancia del foco a la directriz, se designa por la letra p.
- Eje:Es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.
- Vértice:Es el punto de intersección de la parábola con su eje.
- Radio vector:Es un segmento que une un punto cualquiera de la parábola con el foco.

5.1.1. OBSERVACIONES:

Sea A el punto medio del segmento QF . Como AF=AQ, entonces el punto A pertenece a la parábola. V es llamado VERTICE de la parábola.

5.2. Ecuaciones Analíticas de la Parábola

En esta sección sólo se considerarán parábolas con el vértice A en el origen de coordenadas y cuyos focos estarán localizados sobre los ejes x ó y



Sea P(x, y) un punto de la parábola entonces, $\overline{\boldsymbol{PD}} = \overline{\boldsymbol{PF}}$.

Pero, $\overline{\boldsymbol{PD}} = \boldsymbol{x} + \dfrac{\boldsymbol{p}}{2}$ y $\overline{PF} = \sqrt{\left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 + y^2}$

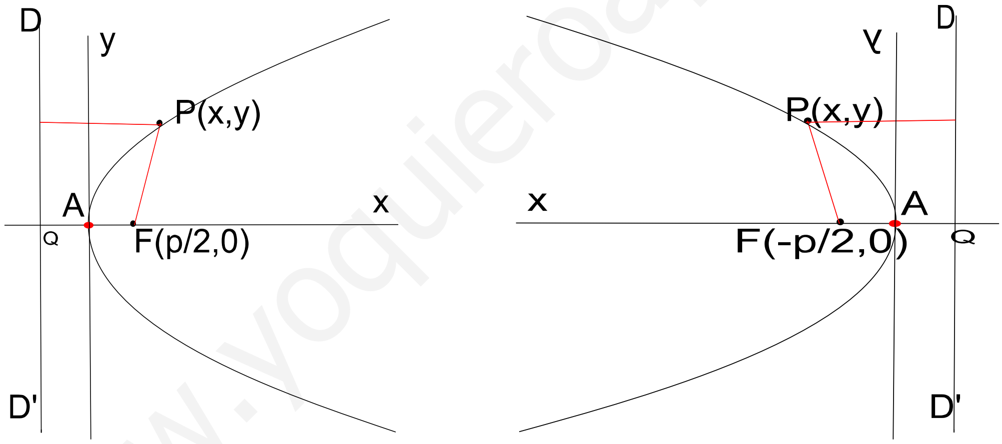
Luego, $x + \dfrac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 + y^2}$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la última igualdad, y desarrollando los binomios, se obtiene: $x^2 + \dfrac{p^2}{4} + px = x^2 + \dfrac{p^2}{4} - px + y^2$, y simplificando queda finalmente,

$$\boldsymbol{y}^2 = 2\boldsymbol{px}$$

5.3. TEOREMA 1 (Ecuaciones de la Parábola)

i. La ecuación de la parábola que tiene su foco en F(p/2, 0) y por directriz la recta x = -p/2 viene dada por : $\mathbf{y^2=2px}$ (3). Recíprocamente si un punto P del plano, satisface la ecuación (3) entonces P está en la parábola

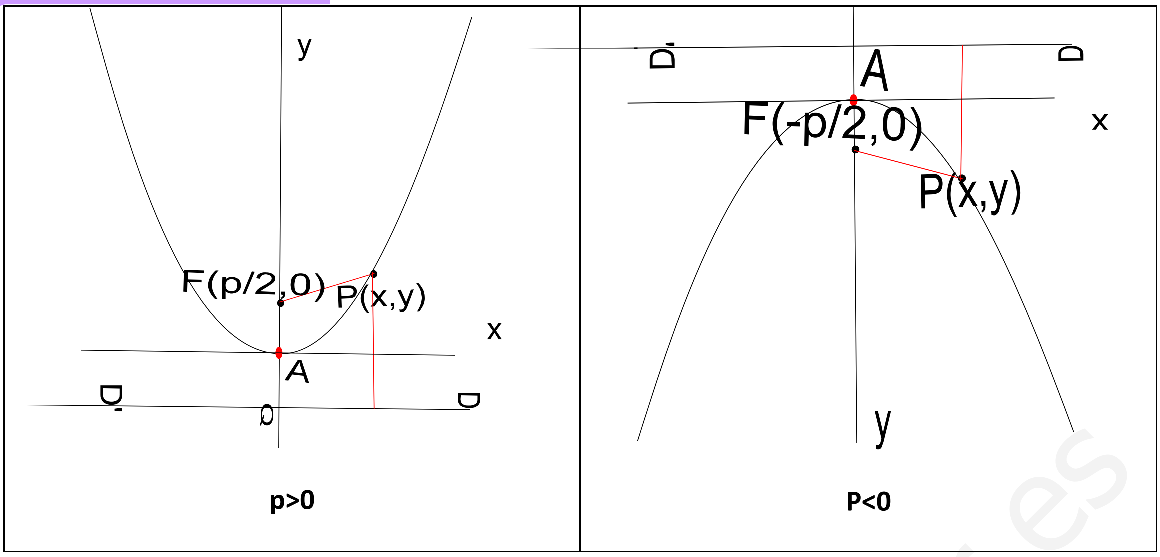


p>0 p<0

ii. La ecuación de la parábola que tiene su foco en F(0, p/2) y por directriz la recta $y = -\dfrac{p}{2}$ es:

$$x^2 = 2py \quad (4)$$

iii. Recíprocamente, si un punto P del plano, satisface (4) entonces P está en la parábola



Observaciones:

- *En la figura aparecen las gráficas de dos parábolas abiertas hacia arriba (en el caso de p>0) y hacia abajo (p<0), respectivamente y cuyos focos están localizados en el punto F(0, p/2) y cuya directriz es la recta de ecuación y = -p/2.*
- *Además, todos sus puntos son simétricos con respecto al eje y: de aquí que las ecuaciones que representan sus lugares geométricos, presentan únicamente a la variable x elevada en una potencia par*
- *Igualmente, las gráficas de la corresponden a las gráficas de parábolas abiertas hacia la derecha (p > 0) e izquierda (p < 0) respectivamente, con focos en el punto F(p/2, 0) y cuya directriz es la recta de ecuación **x = -p/2**. Además todos sus puntos son simétricos con respecto al eje x, de aquí que las ecuaciones que representan sus lugares geométricos, poseen únicamente a la variable y elevada a su potencia par*

5.4. Traslación de Ejes

La ecuación de la circunferencia con centro en C(4,3) y radio 5 era:

$$(x-4)^2+(y-3)^2=25 \Rightarrow x^2+y^2-8x-6y=0$$

Sin embargo, si se encuentra la ecuación con centro en C(0, 0) y radio 5. Se obtiene $x^2+y^2=25$

De lo anterior se concluye que a veces puede cambiar la ecuación sin cambiar la forma de la gráfica

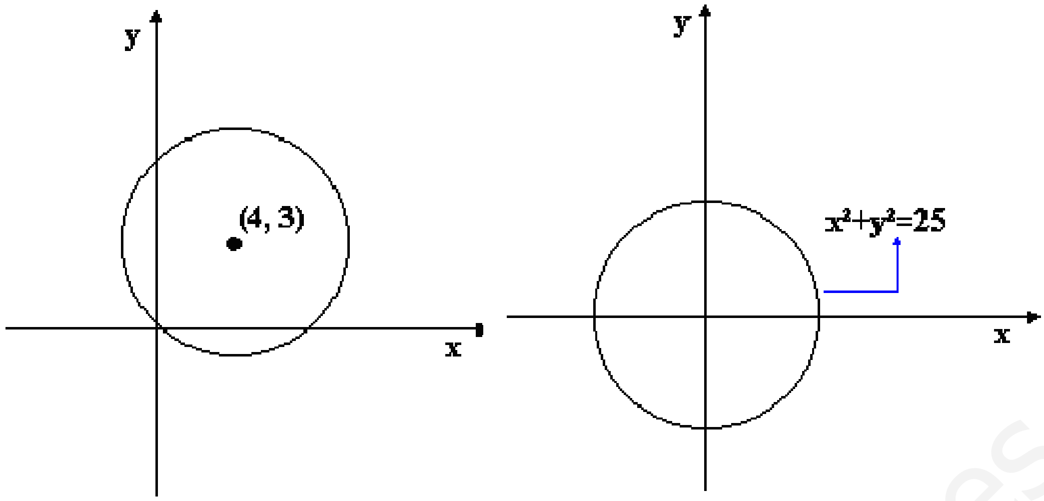
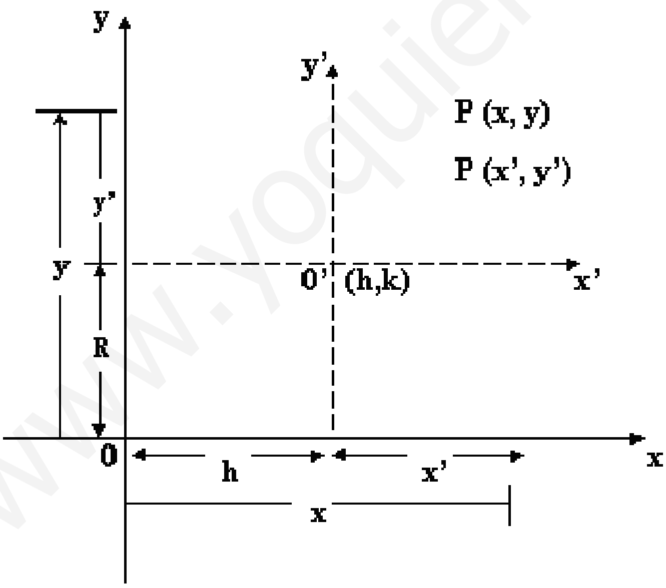


fig. 6.1.5.

Si en el plano cartesiano x - y se eligen nuevos ejes coordenados paralelos a los ejes x e y, se dice entonces que ha habido una "TRASLACIÓN DE EJES". Al fin de analizar los cambios que se presenten en las coordenadas de los puntos del plano al introducir un nuevo sistema de coordenadas x’ e y’ paralelo a los ejes x e y, se toma un punto fijo o’(h, k) que se llama: ORIGEN del nuevo sistema.

Sea ahora, un punto P(x, y) del plano, cuyas coordenadas están referidas al sistema con origen O(O, O) Entonces las coordenadas de P(x’, y’) referidas al sistema x’-y’ vienen dadas por las relaciones:



$x = x' + h$

$y = y' + k$

llamadas: ECUACIONES DE TRASLACIÓN DE EJES, y que pueden deducirse fácilmente de la fig.

Observación:

La traslación de ejes modifica la ecuación de una curva y algunas veces la simplifica, pero no altera la forma de la curva.

Una aplicación útil de la traslación de ejes se consigue cuando se obtienen las ecuaciones generales de la parábola, con vértice en el punto A (h, k) referido al sistema x-y y para las cuales la directriz es perpendicular a uno de los ejes.

Si se toma como referencia los ejes x' e y', hallar las ecuaciones de la parábola con vértice en V(h, k), equivale a encontrar las ecuaciones de la parábola con vértice en (0, 0) referido al nuevo sistema.

Las ecuaciones , $(y')^2 = 2px'$, $(x')^2 = 2py'$ *permiten escribir las ecuaciones en forma general de la parábola, como lo afirma el siguiente teorema:*

6. Teorema2 (Ecuaciones de la parábola. Forma general)

i. La ecuación de la parábola con vértice en el punto V (h, k), que tiene su foco en $F[h, k + \frac{p}{2}]$ y por directriz la recta: $y = k - \frac{p}{2}$ (fig.5)

viene dada por: $(x-h)^2 = 2p(y-k)$

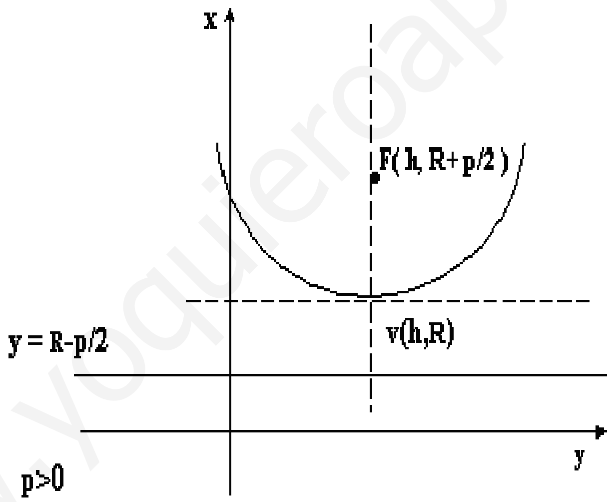


Fig 5.

i. La ecuación de la parábola con vértice en el punto V (h, k), que tiene su foco en $F[h + \frac{p}{2}, k]$ y por directriz la recta:

$$x = h - \frac{p}{2}$$

(fig. 6..) viene dada por:

$$(y-k)^2 = 2p(x-h) \quad (2)$$

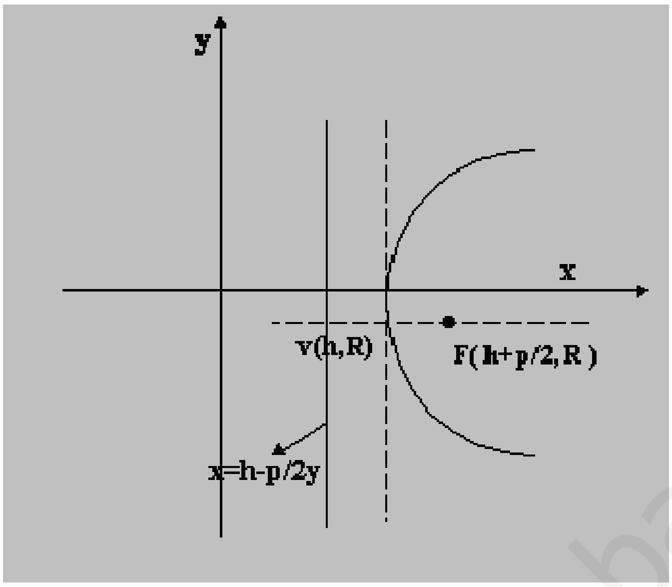


fig. 6.

Demostración:

Es similar a la del teorema 1, aplicado al sistema x'-y' y luego hacer $x' = x - h$ e $y' = y - k$

Observación:

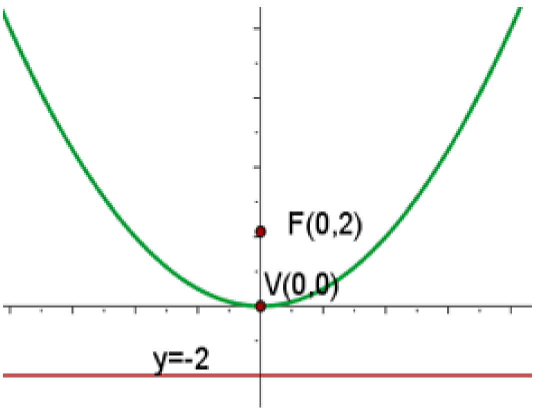
Las ecuaciones (1) y (2) del teorema 2, después de simplificarlas, pueden expresarse en la forma:

$x^2 - 2hx - 2py + (h^2 + 2pk) = 0$ (3)

$y^2 - 2ky - 2px + (k^2 + 2ph) = 0$ (4)

En las ecuaciones (3) y (4) puede notarse que una de las variables aparece al cuadrado y la otra lineal. La parábola siempre se abre en la dirección del eje cuya variable aparece lineal. Así por ejemplo, la ecuación (3) representa una parábola que se abre hacia el semieje y positivo (si p > 0) o hacia el semieje y negativo (si p < 0). Igualmente, la ecuación (4) representa una parábola abierta hacia la derecha (si p > 0) o hacia la izquierda (si p < 0).

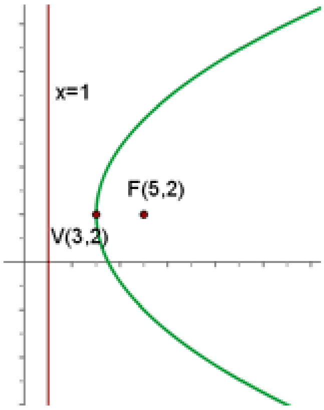
EJERCICIO1: Dada la parábola $x^2 = 8y$, calcular su vértice, su foco y la recta directriz.



$2p = 8$ $\qquad$ $\frac{p}{2} = 2$

$V(0,0)$ $\qquad$ $F(0,2)$ $\qquad$ $y = -2$

EJERCICIO 2



Dada la parábola $(y-2)^2 = 8(x-3)$, calcular su vértice, su foco y la recta directriz.

$2p = 8$ $\qquad \frac{p}{2} = 2$

$V(3,2)$ $\qquad F(5,2)$ $\qquad x = 1$