OPERACIONES CON LÍMITES DE FUNCIONES

Las operaciones con límites, tanto en un punto como en el infinito, tiene unas propiedades análogas que debemos conocer:

PROPIEDADES

El límite de la suma o diferencia de dos funciones es la suma o diferencia de los límites de cada una de las funciones	$\lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) \pm g(x) \right) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) \pm \lim\limits_{x \to \infty} g(x)$
El límite de un producto de funciones es el producto de los límites de cada una de las funciones	$\lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to \infty} g(x)$
El límite de un cociente de funciones es el cociente de los límites de cada una de las funciones	$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to \infty} f(x)}{\lim\limits_{x \to \infty} g(x)}$
El límite del producto de una función por un número real es el producto del número por el límite de la función	$\lim\limits_{x \to \infty} \left(k \cdot f(x) \right) = k \cdot \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$
El límite de una función constante coincide con el valor de la constante	$\lim\limits_{x \to \infty} k = k$
El límite de la potencia de dos funciones es el valor de la potencia de sus límites	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)^{\lim\limits_{x \to \infty} g(x)}$

INDETERMINACIONES

Cuando en el cálculo de un límite de una función, no obtenemos una solución concreta, estamos ante una indeterminación, que debemos resolver.

Tipos de indeterminaciones teniendo en cuenta a que tiende x:

Límites cuando $x \to \pm\infty$:

a) Indeterminación del tipo: $\infty - \infty$

b) Indeterminación del tipo: $\dfrac{\infty}{\infty}$

c) Indeterminación del tipo: 1^{∞}

Límites de una función en un punto

a) Indeterminación del tipo: $\dfrac{0}{0}$

b) Indeterminación del tipo: $\dfrac{k}{0}$

Resolución de la indeterminación : $\dfrac{\infty}{\infty}$

a) *Se resuelve dividiendo numerador y denominador por la x elevado al mayor exponente del denominador o del numerador*

Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x+5}{3x^2+5x}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3x+5}{3x^2+5x}\right)=\frac{\infty}{\infty}$$

Es una indeterminación, resolvemos dividiendo numerador y denominador por x^2*:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3x+5}{3x^2+5x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}+\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{3x^2}{x^2}+\dfrac{5x}{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-\overset{\boxed{0}}{\dfrac{3}{x}}+\overset{\boxed{0}}{\dfrac{5}{x^2}}}{3+\overset{\boxed{0}}{\dfrac{5}{x}}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

Resolución de la indeterminación : $\infty - \infty$

b) Si no hay expresiones con raíces, se resuelve la operación entre las expresiones analíticas de las funciones:

Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x} - \frac{x - 2}{3} \right)$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3}{x} - \lim_{x \to \infty} \frac{x - 2}{3} = \infty - \infty$$

Es una indeterminación, resolvemos realizando la operación: $\frac{x^2 - 3}{x} - \frac{x - 2}{3}$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x} - \frac{x - 2}{3} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3(x^2 - 3)}{3x} - \frac{x(x - 2)}{3x} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^2 - 9 - x^2 + 2x}{3x} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2 + 2x - 9}{3x} \right) = \frac{\infty}{\infty}$$

Resolvemos ahora la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2 + 2x - 9}{3x} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{2x^2}{x} + \frac{2x}{x} - \frac{9}{x}}{\frac{3x}{x}} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x + 2 - \overset{0}{\cancel{\frac{9}{x}}}}{3} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x + 2}{3} \right) = \infty$$

Resolución de la indeterminación : $\infty - \infty$

c) *Si hay expresiones con raíces, se resuelve multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión radical*

Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + x} \right)$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + x} \right) = \infty - \infty$$

Es una indeterminación, resolvemos multiplicando y dividiendo la expresión radical por:

$$\left(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x} \right) \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + x} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + x} \right)\left(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x} \right)}{\left(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x} \right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\left(\sqrt{x^2 - x} \right)^2 - \left(\sqrt{x^2 + x} \right)^2 \right)}{\left(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x} \right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x - x^2 - x}{\left(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x} \right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{-2x}{\left(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x} \right)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Resolvemos ahora la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-2x}{\left(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x} \right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{-2x}{x}}{\left(\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2} - \dfrac{x}{x^2}} + \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{x}{x^2}} \right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1 - \overset{\nearrow 0}{\dfrac{1}{x}}} + \sqrt{1 + \overset{\nearrow 0}{\dfrac{1}{x}}} \right)} = \frac{-2}{2} = -1$$

Indeterminación : 1^{∞}

El límite de la sucesión $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *es el número e* $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$$a_{100} = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}704813829....$$

$$a_{10000} = \left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000} = 2{,}71845927....$$

$$a_{1000000} = \left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000} = 2{,}718280469....$$

$$a_{1000000000} = \left(1+\frac{1}{1000000000}\right)^{1000000000} = 2{,}718281827.... \cong e$$

Los límites del tipo $\lim\limits_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = 1^{\infty}$ *se denominan límites del tipo número e*

Podemos probar que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

Resolución de la indeterminación : 1^{∞}

Calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\lim_{x\to\infty} 2x} = 1^{\infty}$$

Para resolver este límite, transformaremos la expresión de la función para buscar el nº e

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

Sumamos y restamos 1 a la expresión inicial

Realizamos la operación

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-1}-1\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1-x+1}{x-1}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{2x}$$

Dividimos numerador y denominador por 2

Multiplicamos y dividimos el exponente por el denominador del límite

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\frac{2}{2}}{\frac{x-1}{2}}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2}{x-1}\cdot 2x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{4x}{x-1}}$$

Usamos la propiedad de las potencias: $\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x-1}} = e^4$$

Resolución de la indeterminación : $\frac{0}{0}$

Para resolver esta indeterminación, se descomponen en producto de factores los polinomios del numerador y del denominador, y después se simplifican los factores comunes.

Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{2^2 - 3 \cdot 2 + 2}{2^2 - 2 - 2} = \frac{0}{0}$$

Es una indeterminación, descomponemos los polinomios del numerador y el denominador:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$$

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x - 2)}(x - 1)}{\cancel{(x - 2)}(x + 1)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 1)}{(x + 1)} = \frac{2 - 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Resolución de la indeterminación : $\dfrac{k}{0}$

Para resolver esta indeterminación, debemos estudiar los límites laterales. Si estos son iguales, la función tiene límite y si son distintos, la función no tiene límite.

Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2}{x - 2}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2}{x - 2} = \frac{2^2 + 2}{2 - 2} = \frac{6}{0}$$

Es una indeterminación, Estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 + 2}{x - 2} \cong \frac{2{,}000001^2 + 2}{2{,}000001 - 2} \cong \frac{6}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + 2}{x - 2} \cong \frac{1{,}999999^2 + 2}{1{,}999999 - 2} \cong \frac{6}{0^-} = -\infty$$

Como los límites laterales son distintos, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2}{x - 2}$ *no existe*