1. Calcula las razones trigonométricas que se dan a continuación, expresando los ángulos correspondientes como suma o diferencia de ángulos conocidos. Simplifica todo lo que puedas los resultados (incluso, en su caso, racionalizando). **(1 punto)**

a) $\operatorname{sen} 15^{\circ}$

b) $\operatorname{tg} 165^{\circ}$

2. Una escalera de bomberos de 10 metros de longitud se ha fijado en una calle sobre un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45º y si se apoya sobre la otra fachada forma un ángulo de 30º. Halla la anchura de la calle. ¿A qué altura se alcanza con dicha escalera sobre cada una de las fachadas? **(2 puntos)**

3. Simplifica al máximo la expresión $\dfrac{2\operatorname{sen} y \cdot \cos(x-y) + 2\cos y \cdot \operatorname{sen}(x-y)}{\operatorname{sen} 2x}$. **(1 punto)**

4. Comprueba que la igualdad $\dfrac{\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x} = \sec 2x$, es cierta. **(1 punto)**

5. Resuelve la ecuación trigonométrica $2\cos^2 x + \cos 2x \cdot \cos x = 0$. **(2 puntos)**

6. Resuelve el sistema de ecuaciones trigonométricas $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ \cos 2x + \cos 2y = -1 \end{cases}$ **(2 puntos)**

7. Halla las coordenadas del vector $\vec{w} = (-10, 2)$ respecto de la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$, donde $\vec{u} = (-3, 5)$ y $\vec{v} = (1, 2)$. **(1 punto)**

* ① a) $\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ =$

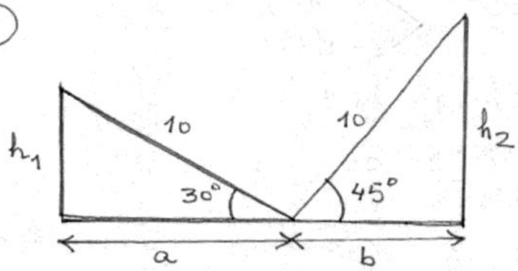
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}}$$

b) $$\operatorname{tg} 165^\circ = \operatorname{tg}(120^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 120^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 120^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{-\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ} =$$

$$= \frac{-\sqrt{3} + 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{1 + 3 - 2\sqrt{3}}{1 - 3} =$$

$$= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{-2} = \underline{\underline{-2 + \sqrt{3}}}$$

* ②



$$\cos 30^\circ = \frac{a}{10} \Rightarrow a = 10 \cdot \cos 30^\circ$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a = 8'66 \text{ m}}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{b}{10} \Rightarrow b = 10 \cdot \cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{b = 7'07 \text{ m.}}}$$

* Anchura de la calle $= a + b = 8'66 + 7'07 = \underline{\underline{15'73 \text{ m.}}}$

* Altura fachada 1 (h_1) : $\operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{h_1}{10} \Rightarrow h_1 = 10 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ$

$$\Rightarrow h_1 = 10 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{h_1 = 5 \text{ m.}}}$$

* Altura fachada 2 (h_2) : $\operatorname{sen} 45^\circ = \dfrac{h_2}{10} \Rightarrow h_2 = 10 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ$

$$\Rightarrow \underline{\underline{h_2 = 7'07 \text{ m.}}}$$

* ③ $$\frac{2 \operatorname{sen} y \cdot \cos(x-y) + 2\cos y \cdot \operatorname{sen}(x-y)}{\operatorname{sen} 2x} =$$

$$= \frac{2\left[\operatorname{sen} y \cos(x-y) + \cos y \operatorname{sen}(x-y)\right]}{2 \operatorname{sen} x \cos x} = \frac{2 \operatorname{sen}\left[y + (x-y)\right]}{2 \operatorname{sen} x \cos x} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} x}{2 \operatorname{sen} x \cos x} = \frac{1}{\cos x} = \underline{\underline{\sec x}}$$

* ④ $$\frac{\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x} = \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x}}{\frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}}{\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x \cos x}} = \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen} x \cos x \cos 2x} = \frac{1}{\cos 2x} = \underline{\underline{\sec 2x}}$$

* (5) $2\cos^2 x + \cos 2x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + (\cos^2 x - \text{sen}^2 x)\cdot \cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos^2 x + \left(\cos^2 x - (1-\cos^2 x)\right)\cdot \cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos^2 x + (2\cos^2 x - 1)\cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x\,(2\cos x + 2\cos^2 x - 1) = 0$

Dos posibilidades: (1) $\cos x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 90° + 180° k}}$

(2) $2\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{4} =$

$= \frac{-2\pm\sqrt{12}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \begin{cases} 0'366 \\ -1'366 \end{cases}$

Si $\cos x \cong 0'366 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x = 68'529 + 360k}} \\ \underline{\underline{x = 291'47 + 360k}} \end{cases}$

Si $\cos x \cong -1'366 \Rightarrow$ <u>no hay solución</u> pues $-1 \leq \cos x \leq 1$

* (6) De la 2ª ecuación: $\cos^2 x - \text{sen}^2 x + \cos^2 y - \text{sen}^2 y = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x - (1-\cos^2 x) + \cos^2 y - (1-\cos^2 y) = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos^2 x + 2\cos^2 y - 2 = -1 \Rightarrow$ [de la 1ª ecuación $\cos x = 1 - \cos y$]

$\Rightarrow 2(1-\cos y)^2 + 2\cos^2 y - 2 = -1 \Rightarrow 2 - 4\cos y + 2\cos^2 y + 2\cos^2 y - 2 = -1$

$\Rightarrow 4\cos^2 y - 4\cos y + 1 = 0 \Rightarrow \cos y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 4\cdot 1}}{8} =$

$= \frac{4\pm 0}{8} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \Rightarrow y_1 = 60 + 360k, \quad y_2 = 300 + 360k$

$\cos x = 1 - \cos y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 60 + 360k, \quad x_2 = 300 + 360k$

<u>Soluciones</u>: $(60°, 60°)$, $(60°, 300°)$, $(300°, 60°)$ y $(300°, 300°)$

* (7) $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \Rightarrow (-10, 2) = a(-3, 5) + b(1, 2) \Rightarrow$

$(-10, 2) = (-3a, 5a) + (b, 2b) \Rightarrow (-10, 2) = (-3a + b, 5a + 2b)$

$\Rightarrow \begin{cases} -3a + b = -10 \\ 5a + 2b = 2 \end{cases} \times(-2) \quad \begin{cases} 6a - 2b = 20 \\ 5a + 2b = 2 \end{cases} +$

$11a = 22 \Rightarrow \underline{\underline{a = 2}}$

Sustituyendo:

$-3\cdot 2 + b = -10 \Rightarrow b = -10 + 6 \Rightarrow \underline{\underline{b = -4}}$

Por tanto las coordenadas de $\vec{w}$ respecto de la base B son: $\underline{\underline{\vec{w}_B = (2, -4)}}$