1. Hallar una recta perpendicular y otra paralela a la recta $r \equiv 2x - 5y + 4 = 0$ que pasen ambas por el punto $P(-3, 0)$. **(2 puntos)**

2. Encuentra el punto de la recta $r \equiv 4x - 8y + 7 = 0$ que está a la misma distancia de los puntos $A(2, 1)$ y $B(1, -3)$. **(2 puntos)**

3. Resuelve la siguiente ecuación logarítmica: $\frac{1}{2}\log(2x+3) = \log x$ **(1 punto)**

4. Calcula los siguientes límites **(1 punto; 0,5 puntos por apartado)**:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{5x^2 + 5x - 10}{3x^3 - 6x^2 - 3x + 6}$; **b)** $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^4 - 3x^5 + 7}{6x^3 + 5x^4 - 2x^2 - x + 2}$

5. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+2} & \text{si} \quad x < -1 \\ 3 & \text{si} \quad x = -1 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad -1 < x < 3 \\ \frac{4}{x-1} + 5 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$ en los puntos $x = -1$ y $x = 3$.

Caso de que no sea continua en alguno de ellos explica el tipo de discontinuidad. **(1 punto)**

6. Dada la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + x - 2}$, contesta a los siguientes apartados:

a) Halla los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**
b) Halla las asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**
c) Realiza una representación gráfica aproximada de la función. **(0,5 puntos)**

7. Calcula la derivada de la función $f(x) = \frac{-2x^3 + 1}{3x - 1}$ en el punto $x = 2$, así como la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. **(1 punto)**

① Vector director de r: $\vec{u} = (5,2)$. Recta paralela a r que pasa por $P(-3,0)$: $\underline{\underline{\dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y}{2}}} \Leftrightarrow 2x+6 = 5y \Leftrightarrow \underline{\underline{2x-5y+6=0}}$

Vector perpendicular a $\vec{u}$: $\vec{v} = (-2,5)$. Recta perpendicular a r que pasa por $P(-3,0)$: $\underline{\underline{\dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y}{5}}} \Leftrightarrow 5x+15 = -2y \Leftrightarrow$ $\underline{\underline{5x+2y+15=0}}$

② Sea $P(x,y) \in r$. Entonces $d(P,A) = d(P,B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{(2-x)^2+(1-y)^2} = \sqrt{(1-x)^2+(-3-y)^2} \Leftrightarrow 4+x^2-4x+1+y^2-2y =$
$= 1+x^2-2x+9+y^2+6y \Leftrightarrow 5-4x-2y = 10-2x+6y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2x-8y-5=0 \Leftrightarrow \underline{s \equiv 2x+8y+5=0}$ (esta es la mediatriz de los puntos A y B. El punto que se busca es el corte de r con s: $\left.\begin{array}{l} 4x-8y+7=0 \\ 2x+8y+5=0 \end{array}\right\}$ Resolviendo el sistema: $x=-2$; $y = \frac{-1}{8}$.

Por tanto el punto buscado es: $\underline{\underline{P\left(-2, \frac{-1}{8}\right)}}$

③ $\frac{1}{2}\log(2x+3) = \log x \Rightarrow \log(2x+3) = 2\log x \Rightarrow$
$\Rightarrow \log(2x+3) = \log x^2 \Rightarrow 2x+3 = x^2 \Rightarrow x^2-2x-3=0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{2\pm 4}{2} = \begin{cases} \underline{\underline{x_1 = 3}} \\ \underline{\underline{x_2 = -1}} \end{cases}$$

④ a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^2+5x-10}{3x^3-6x^2-3x+6} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(5x+10)}{(x-1)(3x^2-3x-6)} =$
$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x+10}{3x^2-3x-6} = \dfrac{15}{-6} = \underline{\underline{-\dfrac{15}{6}}}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^4-3x^5+7}{6x^3+5x^4-2x^2-x+2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \underline{\underline{+\infty}}$ (como grado numerador mayor que grado denominador, se estudian los signos de los monomios de mayor grado).

⑤ $\underline{\underline{x=-1}}$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x}{x+2} = -1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2-2) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x) = -1$, pero

$f(-1) = 3 \neq \lim\limits_{x\to -1} f(x) \Rightarrow$ $\underline{f \text{ no es continua en } x=-1}$: $\underline{\text{discontinuidad evitable}}$.

$\underline{\underline{x=3}}$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (x^2-2) = 7 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \left(\dfrac{4}{x-1}+5\right) = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 7 = f(3) \Rightarrow$

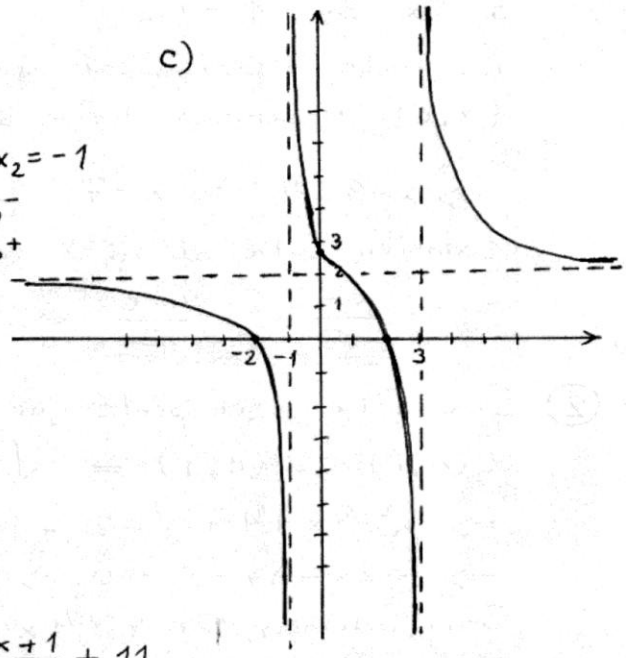
$\Rightarrow$ $\underline{f \text{ es continua en } x=3}$.

(6) a) Puntos de corte eje X: $y=0 \Rightarrow 2x^2-8=0 \Rightarrow x^2=4$

$\Rightarrow x=\pm 2$; $\underline{\underline{(2,0)}}$ y $\underline{\underline{(-2,0)}}$

Punto de corte eje Y : $\underline{\underline{(0, 8/3)}}$

c)



(*) b) Verticales : $x^2-2x-3=0 \Rightarrow x_1=3,\ x_2=-1$

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = \frac{10}{0} = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x\to 3^- \\ +\infty & \text{si } x\to 3^+ \end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{x=3}}$ es una asíntota vertical.

Horizontales :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{y=2}}$$

es una asíntota horizontal

(7) $$\lim_{x\to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{\frac{x^2-3x+1}{3x+5}+11}{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{\frac{x^2-3x+1+33x+55}{3x+5}}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{x^2+30x+56}{(3x+5)(x+2)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+28)(x+2)}{(3x+5)(x+2)} = \frac{26}{-1} = -26 \Rightarrow \underline{\underline{f'(-2)=-26}}$$

Recta tangente :

$$y-f(a)=f'(a)(x-a) \Rightarrow y-f(-2)=f'(-2)(x-(-2))$$

$$\Rightarrow y+11=-26(x+2) \Rightarrow y+11=-26x-52$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y=-26x-63}}$$

(6) (*) Verticales

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = \frac{-6}{0} = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x\to -1^- \\ +\infty & \text{si } x\to -1^+ \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{\underline{x=-1}}$ es una asíntota vertical.