OPERACIONES EN FORMA POLAR

EJERCICIO 5 : Una de las raíces octavas de un número complejo, z, es $-1+i$. Halla el valor de z.

Solución:

Si $-1+i$ es una raíz octava de z, entonces: $z=(-1+i)^8$

Expresamos $-1+i$ en forma polar:

$|-1+i|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$tg\,\alpha=\dfrac{1}{-1}=-1 \quad\rightarrow\quad \alpha=135^\circ$ (pues está en el 2.º cuadrante)

Por tanto: $z=(-1+i)^8=\left(\sqrt{2}_{135^\circ}\right)^8=16_{1080^\circ}=16_{0^\circ}=16$

EJERCICIO 6 : El producto de dos números complejos es $2\sqrt{2}_{75^\circ}$. Sabiendo que uno de los números es $z=1+i$, halla el otro número.

Solución:

Llamamos w al número buscado. Entonces, tenemos que: $\left.\begin{array}{l} z\cdot w=2\sqrt{2}_{75^\circ} \\ z=1+i \end{array}\right\}$

Expresamos z en forma polar:

$|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$tg\,\alpha=\dfrac{1}{1}=1 \quad\rightarrow\quad \alpha=45^\circ$ (pues está en el primer cuadrante)

Luego $z=\sqrt{2}_{45^\circ}$ y, por tanto:

$w=\dfrac{2\sqrt{2}_{75^\circ}}{\sqrt{2}_{45^\circ}}=2_{30^\circ}=2(\cos 30^\circ+i\,sen\,30^\circ)=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{3}+i \Rightarrow$ Es decir: $w=2_{30^\circ}=\sqrt{3}+i$

EJERCICIO 7 : Calcula e interpreta gráficamente las soluciones: $\sqrt[3]{-27i}$

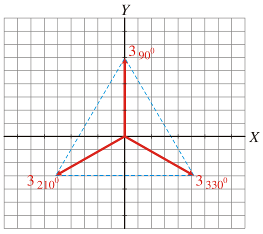
Solución:

Expresamos $-27i$ en forma polar: $-27i=27_{270^\circ}$

Así: $\sqrt[3]{-27i}=\sqrt[3]{27_{270^\circ}}=\sqrt[3]{27}_{\frac{270^\circ+360^\circ k}{3}}$ con $k=0,1,2$

$k=0 \rightarrow \sqrt[3]{27}_{90^\circ}=3_{90^\circ}$ $\qquad k=1 \rightarrow 3_{210^\circ}$ $\qquad k=2 \rightarrow 3_{330^\circ}$

Las tres raíces son: 3_{90°; 3_{210°; 3_{330°

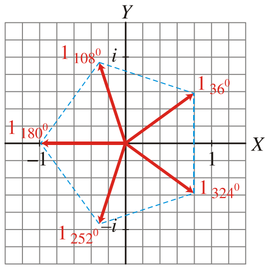


Los afijos de las tres raíces cúbicas ocupan los vértices de un triángulo equilátero.

EJERCICIO 8 : Halla $\sqrt[5]{-1}$ e interpreta gráficamente las soluciones.

Solución:

$\sqrt[5]{-1}=\sqrt[5]{1_{180^\circ}}=1_{\frac{180^\circ+360^\circ k}{5}}=1_{36^\circ+72k}$; $k=0,1,2,3,4 \Rightarrow$ Las cinco raices son: 1_{36°; 1_{108°; 1_{180°; 1_{252°; 1_{324°



Los afijos de las raíces quintas ocupan los vértices de un pentágono regular.

EJERCICIO 9 : Halla un número complejo, *z*, sabiendo que una de sus raíces quintas es $2 - 2i$.

Solución:

$z = (2-2i)^5 \Rightarrow$ Expresamos $2 - 2i$ en forma polar:

$|2-2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$tg\,\alpha = \frac{-2}{2} = -1 \quad \rightarrow \quad \alpha = 315^\circ$ (pues está en el 4.º cuadrante)

Por tanto:

$z = (2-2i)^5 = \left(\sqrt{8}_{315^\circ}\right)^5 = \left(\sqrt{2^3}_{315^\circ}\right)^5 = \sqrt{2^{15}}_{1\,575^\circ} = 2^7\sqrt{2}_{135^\circ} = 128\sqrt{2}_{135^\circ} = 128\sqrt{2}\left(\cos 135^\circ + i\,sen\,135^\circ\right) =$

$= 128\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -128 + 128i \Rightarrow$ Es decir: $z = 128\sqrt{2}_{135^\circ} = -128 + 128i$

EJERCICIO 10 : Calcula: $\sqrt[4]{-81}$

Solución:

$\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81_{180^\circ}} = 3_{\frac{180^\circ + 360^\circ k}{4}} = 3_{45^\circ + 90^\circ k}$; $k = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow$ Las cuatro raíces son: 3_{45°; 3_{135°; 3_{225°; 3_{315°