NÚMEROS COMPLEJOS

EJERCICIOS RESUELTOS

I) Efectúa la siguiente operación y simplifica: $\dfrac{(1+3i)(1+2i)}{1+i}$

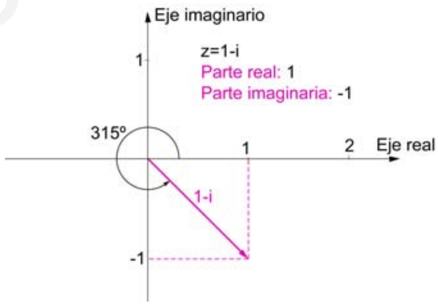
Solución

$$\frac{(1+3i)(1+2i)}{1+i} = \frac{1+2i+3i+6i^2}{1+i} = \frac{-5+5i}{1+i} = \left(\frac{-5+5i}{1+i}\right)\cdot\left(\frac{1-i}{1-i}\right) =$$

$$= \frac{-5+5i+5i-5i^2}{2} = \frac{10i}{2} = 5i$$

II) Calcula: $\sqrt[3]{1-i}$

Solución



$$\sqrt[3]{1-i} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = arctg\,\dfrac{-1}{1} = arctg(-1) = 315^o \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)_{315^o}}$$

$$\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)_{315^o}} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} R = \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2} \\ \beta = \left\{\begin{array}{l} \beta_1 = \dfrac{315^o+360^o\cdot 0}{3} = 105^o \\ \beta_2 = \dfrac{315^o+360^o\cdot 1}{3} = 225^o \\ \beta_3 = \dfrac{315^o+360^o\cdot 2}{3} = 345^o \end{array}\right. \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt[3]{1-i} = \left\{\begin{array}{l} z_1 = \left(\sqrt[6]{2}\right)_{105^o} \\ z_2 = \left(\sqrt[6]{2}\right)_{225^o} \\ z_3 = \left(\sqrt[6]{2}\right)_{345^o} \end{array}\right.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

III) Escribe en forma polar:

a) $1+\sqrt{3}i$
b) $-1+\sqrt{3}i$
c) $1-\sqrt{3}i$
d) $-1-\sqrt{3}i$
e) $3\sqrt{3}+3i$
f) $-3\sqrt{3}-3i$
g) $2i$
h) -4
i) $-3i$

IV) Escribe en forma binómica:

a) 2_{60° d) 2_{180°

b) $1_{\frac{3\pi}{2}}$ e) 4_{750°

c) 5_{450° f) $6_{\frac{\pi}{3}}$

V) Hallar el módulo y el argumento de: a) $\dfrac{1+i}{1-i}$ b) $(1+i)2i$

VI) Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:

a) $2i\left(\dfrac{-i+2}{1+i}\right)$ b) $(-2i)^2\cdot\dfrac{1+3i}{4+4i}$

VII) Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:

a) $(3+i)(2+i)-(1-i)(2-2i)$ b) $(3-2i)+(1+2i)(6-2i)-(2-i)$

VIII) Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:

a) $\dfrac{3_{45^\circ}2_{15^\circ}}{6_{30^\circ}}$ b) $\dfrac{2_{30^\circ}3_{60^\circ}}{3_{120^\circ}1_{300^\circ}}$ c) $\dfrac{2_{45^\circ}2_{15^\circ}}{4_{90^\circ}}$

IX) Halla: $\dfrac{i^{32}\cdot i^{17}}{i^2\cdot i^3}$

X) Halla las siguientes potencias: a) $(2-3i)^3$; b) $(3+i)^2$; c) i^{23}; d) $(2+2i)^4$; e) i^{27}; f) i^{48}; g) i^7; h) i^{33} ; i) i^{210}; j) i^{1121}

XI) Sabiendo que $z_1=3-2i$, que $z_2=4-3i$ y que $z_3=-3i$; calcula: a) $z_1+2z_2-z_3$;

b) $z_1\cdot(z_2+z_3)$; c) $2(z_1+z_2)-(z_3)^4$

XII) Calcula, expresando el resultado en forma polar: a) $(1+i)^6$; b) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8$;

c) $(1-i)^4$

XIII) Calcula: a) $\sqrt{-i}$; b) $\sqrt[3]{1+i}$; c) $\sqrt{-16}$

XIV) Calcula: a) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1-\sqrt{3}i}}$; b) $\sqrt{-4}$; c) $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{1-i}}$; d) $\sqrt[3]{\dfrac{-27}{i}}$

XV) a) Opera la expresión $(1+3i)^2\cdot(3-4i)$ y b) calcula las raíces cúbicas del resultado.

XVI) Opera la expresión $\dfrac{(i^4-i^3)}{8i}$ y calcula las raíces cúbicas del resultado.

XVII) Si la raíz cúbica de un número es 2i, calcula las otras dos raíces y ese número.

XVIII) Calcular: $(-2 + 2i)^{64}$.

XIX) Calcular el conjugado del opuesto de: a) $(1 - 2i)^3$; b) $\dfrac{25}{3 + 4i}$; c) $\left(\dfrac{2 + i}{1 - 2i}\right)^2$

XX) Determina x para que el producto (3+2i)·(6+xi) sea:

a) un número real,
b) un número imaginario puro.

XXI) Determina los números reales x e y para que se cumpla: $\dfrac{x + 2i}{1 - i} + yi = 1$

XXII) Determina a para que el complejo $\dfrac{4 + ai}{1 - i}$ sea:

a) un número real,
b) un número imaginario puro.

XXIII) Resuelve las ecuaciones siguientes en el campo complejo. En todos los casos z es un número complejo: despéjalo y calcula su valor.

a) $(2 - 2i) \cdot z = 10 - 2i$

b) $\dfrac{z}{3 + i} = 2 - i$

c) $\dfrac{z}{3 + 4i} + \dfrac{2z + 5i}{1 - 2i} = 2 + 2i$

d) $\dfrac{z}{-z} + \dfrac{2z - 2i}{1 - i} = 3 - 2i$

XXIV) El cociente de dos números complejos es 1/2 y el dividendo es el cuadrado del divisor. Calcula sus módulos y sus argumentos.

XXV) El producto de dos números complejos es -27. Hallarlos sabiendo que uno de ellos es el cuadrado del otro.

XXVI) El producto de dos números complejos es -2 y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es 1/2. Calcula sus módulos y sus argumentos.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

III)

a) 2_{60° d) 2_{240° g) 2_{90°

b) 2_{120° e) $\sqrt{6}_{\,30^\circ}$ h) 4_{180°

c) 2_{300° f) $\sqrt{6}\,210^{o}$ i) 3_{270°

IV)

a) $1+\sqrt{3}i$ d) -2

b) $-i$ e) $2\sqrt{3}+2i$

c) $5i$ f) $3+3\sqrt{3}i$

V) a) 1_{90° b) $\sqrt{8}_{\,135^\circ}$

VI) a) $3+i$ b) $-2-i$

VII) a) $5+9i$ b) $11+9i$

VIII) a) 1_{30° b) 2_{30° c) 1_{330°

IX) 1

X) a) -46-9i; b) 8+6i; c) –i; d) -64; e) –i; f) 1; g) –i; h) i; i)-1; j)i

XI) a) 11-5i; b) -26i; c) -67-10i

XII) a)8_{270°; b) 1_{240°; c) 4_{180°

XIII) a) $1_{135^\circ}; 1_{315^\circ}$; b) $\left(\sqrt[6]{2}\right)_{15^\circ}; \left(\sqrt[6]{2}\right)_{135^\circ}; \left(\sqrt[6]{2}\right)_{255^\circ}$; c) $4_{90^\circ}; 4_{270^\circ}$

XIV) a) $\left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)_{5^\circ}; \left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)_{125^\circ}; \left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)_{245^\circ}$; b) $2_{90^\circ}; 2_{270^\circ}$; c) $1_{30^\circ}; 1_{150^\circ}; 1_{270^\circ}$; d) $3_{30^\circ}; 3_{150^\circ}; 3_{270^\circ}$

XV) a) 50i b) $\left(\sqrt[3]{50}\right)_{30^\circ}; \left(\sqrt[3]{50}\right)_{150^\circ}; \left(\sqrt[3]{50}\right)_{270^\circ}$

XVI) $\left(\frac{1}{2}\right)_{105^\circ}; \left(\frac{1}{2}\right)_{225^\circ}; \left(\frac{1}{2}\right)_{345^\circ}$

XVII) $2_{210^\circ}; 2_{330^\circ}$. El número es -8i $=8_{270^\circ}$

XVIII) $\left(8^{32}\right)_{8640^\circ} = \left(8^{32}\right)$

XIX) a) $11+2i$; b) -3-4i c) 1

XX) a) x= -4, b) x=9

XXI) a) x= 4, y=3

XXII) a) a= -4, b) x=4

XXIII) a) 3+2i b) 7-i c) 4-3i d) 1-2i

XXIV) $\left(\frac{1}{2}\right)_{0^\circ}; \left(\frac{1}{4}\right)_{0^\circ}$

XXV) 3_{60°, 9_{120°

XXVI) 1_{45°, 2_{135°. Otras soluciones: 1_{135°, 2_{45°, 1_{225°, 2_{315°, 1_{315°, 2_{225°